

Maandblad voor de didactiek van de wiskunde

Orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

59e jaargang
1983/1984
nr. 10
juni/juli

Wolters-Noordhoff

EUCLIDES

Redactie: Mw. I. van Breugel - Drs. F. H. Dolmans (hoofdredacteur) - W. M. J. M. van Gaans - Dr. F. Goffree - W. Kleijne - L. A. G. M. Muskens - Drs. C. G. J. Nagtegaal
P. E. de Roest (secretaris) - Mw. H. S. Susijn-van Zaale (eindredactrice) - Dr. P. G. J. Vredenduin (penningmeester)

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Het blad verschijnt 10 maal per cursusjaar.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Voorzitter: Dr. Th. J. Korthagen, Torenlaan 12, 7231 CB Warnsveld, tel. 05750-23417. Secretaris: Drs. J. W. Maassen, Traviatastraat 132, 2555 VJ Den Haag. Penningmeester en ledenadministratie: F. F. J. Gaillard, Jorisstraat 43, 4834 VC Breda, tel. 076-653218. Giro: 143917 t.n.v. Ned. Ver. v. Wiskundeleraren te Amsterdam.
De contributie bedraagt *f* 50,– per verenigingsjaar; studentleden en Belgische leden die ook lid zijn van de V.V.W.L. *f* 35,–; contributie zonder Euclides *f* 30,–.
Adreswijziging en opgave van nieuwe leden (met vermelding van evt. gironummer) aan de penningmeester. Opzeggingen vóór 1 augustus.

Artikelen en mededelingen worden in drievoud ingewacht bij Drs. F. H. Dolmans, Heiveldweg 6, 6603 KR Wijchen, tel. 08894 - 11730. Zij dienen met de machine geschreven te zijn met een marge van 5 cm en een regelafstand van 1½. De auteur van een geplaatst artikel ontvangt kosteloos 5 exemplaren van het nummer waarin het artikel is opgenomen.

Boeken ter recensie aan W. Kleijne, Treverilaan 39, 7312 HB Apeldoorn, tel. 055-550834.

Opgave voor deelname aan de leesportefeuille (buitenlandse tijdschriften) aan A. Hanegraaf, Heemskerkstraat 9, 6662 AL Elst, tel. 08819-2402, giro: 1039886.

Abonnementsprijs voor niet-leden *f* 42,40. Een collectief abonnement (6 ex. of meer) kost per abonnement *f* 24,65. Niet-leden kunnen zich abonneren bij:
Wolters-Noordhoff bv, afd. periodieken, Postbus 567, 9700 AN Groningen, tel. 050-226886. Giro: 1308949.
Abonnees wordt dringend verzocht te wachten met betalen tot zij een acceptgirokaart hebben ontvangen.
Abonnementen gelden telkens vanaf het eerstvolgend nummer. Reeds verschenen nummers zijn op aanvraag leverbaar en worden u, vergezeld van een acceptgirokaart, toegezonden.
Abonnementen worden automatisch verlengd, tenzij zij schriftelijk worden opgezegd voor 1 december.
Losse nummers *f* 7,– (alleen verkrijgbaar na vooruitbetaling).

Advertenties zenden aan:
Intermedia bv, Postbus 371, 2400 AJ Alphen a/d Rijn.
Tel. 01720-62078/62079. Telex 33014.

ISSN 0165-0394

EUCLIDES

Inhoud van de 59e jaargang 1983/1984

ARTIKELEN

KORREL

THEMANUMMERS

BOEKBESPREKINGEN

De 59e jaargang stond onder redactie van mw I. van Breugel - drs. F. H. Dolmans (hoofdredacteur) - W. M. J. M. van Gaans (vanaf december) - dr F. Goffree - W. Kleijne - L. A. G. M. Muskens - drs C. G. J. Nagtegaal (vanaf december) - P. E. de Roest (secretaris) - mw H. S. Susijn-van Zaale (eindredactrice) - dr P. G. J. Vredenduin (penningmeester)

Leerstijlaspecten; veld(on)afhankelijkheid I

HARRIE BROEKMAN

Als alle mensen eens hetzelfde waren, wat zou de wereld dan . . .'

Waar gaat het over?

Leerlingen verwerven zich bij het opnemen, verwerken en gebruiken van begrippen, algoritmen, werkwijzen e.d. veelal een kenmerkende stijl[1]). Zo zal de één visueel aangeboden informatie beter tot zich nemen en een ander mondeling aangeboden informatie; de één zal spontaan, impulsief reageren en een ander zal eerst eens rustig nadenken, meer reflectief reageren; de één zal meer dan een ander de neiging vertonen om structuur aan te brengen in een hoeveelheid gegevens, etc., etc.
Een aantal van de hier bedoelde leerstijlaspecten zijn van speciaal belang voor het leren bezig zijn met wiskunde en zal ik daarom in een serie artikelen aan bod laten komen.*)
In deze artikelen zal ik een beschrijving geven van de bedoelde aspecten van iemands leren. Deze beschrijving zal voor een flink deel bestaan uit voorbeelden en gevolgd worden door een aantal suggesties voor de klassepraktijk. Deze suggesties komen voort uit verschillende brokken onderzoek, de klassepraktijk én mijn optimisme t.a.v. de mogelijkheden om onze leerlingen te leren leren.

Vooraf wil ik echter nog een tweetal opmerkingen maken.

1 In de literatuur wordt veelal onderscheid gemaakt tussen *leerstijl* als een voor een persoon kenmerkende stijl (min of meer stabiele kenmerken die in allerlei situaties een rol spelen) en *leerstrategie* (een in een bepaalde situatie bewust gekozen werkwijze die al dan niet door het onderwijs in de hand gewerkt wordt).[2])
De vraag of je iemand een strategie kunt leren die in strijd is met zijn/haar specifieke stijl, en/of die specifieke stijl misschien wel te veranderen is zal bij de diverse suggesties zijdelings aan bod komen.

*) Veel hulp bij het samenstellen van deze artikelen heb ik – bewust en onbewust – gekregen van mijn collega Prof. Dr. Miep Geensen (PDI Utrecht), van mijn vriend Hans Pouw (tot aug. '82 KPC, thans APS), en van mijn cursisten van de MO-B opleiding wiskunde van de COCMA.

2 Waar mogelijk rekening houden met verschillen tussen de lezers wordt door veel auteurs nagestreefd; ook door mij. Toch wil ik de *geheelstrategen* onder u, d.w.z. diegenen die iets geheel willen beheersen voor ze verder kunnen resp. willen gaan, waarschuwen. Mede door de afwisseling van voorbeelden, gedeeltelijke omschrijvingen en suggesties, maar ook door het feit dat veel leerstijlaspecten samenhangen, is de kans groot dat u vaak het gevoel zult hebben dat u niet verder kunt. Mijn suggestie is: lees eventueel nog eens terug, maar neem vooral ook genoegen met het feit dat u met hiaten in uw kennis verder gaat. Hiaten waarvan u hoopt dat ze later opgevuld kunnen worden, zó dat de principes van het gelezene langzamerhand wel duidelijk worden.

Veld(on)afhankelijkheid

'Juf, kunt u de rest van het bord schoon vegen?

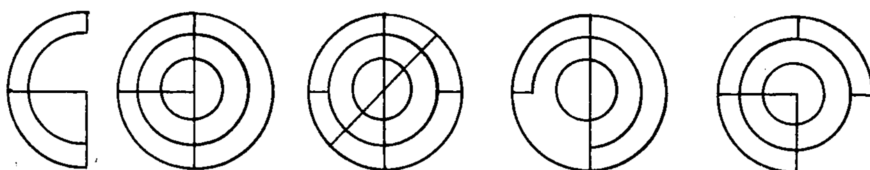
Bij het opnemen van informatie speelt de waarneming een belangrijke rol. Een leerstijlaspect dat daarbij op de voorgrond treedt is de zgn. veld-(on)afhankelijkheid. In het nu volgende zal ik allereerst kort aangeven wat onder veldafhankelijkheid verstaan wordt en hoe dit gemeten wordt. Vervolgens zal ik enkele voorbeelden geven van mogelijke problemen die een sterke veldafhankelijkheid opleveren in het wiskunde-onderwijs. In een volgend artikel zal ik middels een aantal voorbeelden enkele suggesties doen voor hulp aan veldafhankelijke leerlingen.

I Veldafhankelijkheid

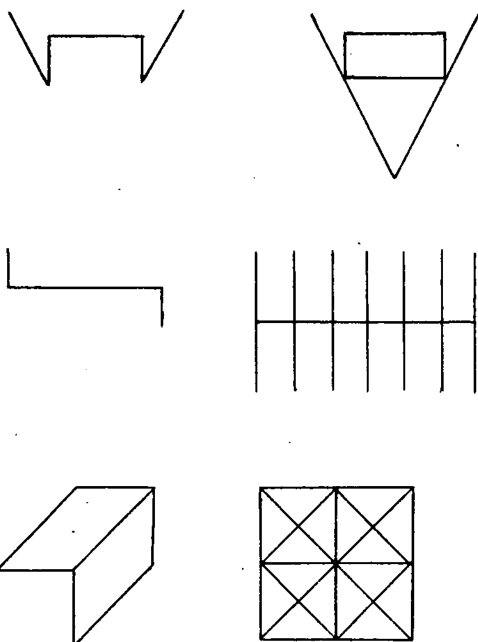
Het belangrijkste onderscheid tussen veld-afhankelijkheid en veld-onafhankelijkheid begint bij de waarneming. Een veldafhankelijk persoon is zwak in het onderscheiden van delen in de informatie. Een veldonafhankelijk persoon heeft de tendentie om in een grote verscheidenheid van taken en situaties de omgeving te benaderen op een meer analyserende manier. Dit houdt in dat in alle situaties de relevante 'figuur' duidelijk wordt onderscheiden van de achtergrond, voorwerpen van de omringende context, etc.
Volgens onderzoekingen zijn er mensen die tamelijk vastzitten aan een bepaalde manier van reageren, óf veldafhankelijk, óf veldonafhankelijk, terwijl anderen de kenmerken van beide 'stijlen' hebben. Deze laatsten kunnen, al naar gelang de situatie, ofwel op de ene ofwel op de andere manier functioneren. Daarbij hebben velen wel een voorkeur voor één van de manieren.
Vooral bij veel meetkundige, maar ook algebraïsche problemen, lijkt veldonafhankelijkheid een voorwaarde voor het komen tot een oplossing.

De belangrijkste tests voor het onderzoeken van veld(on)afhankelijkheid zijn zgn. verborgen figuren tests waarvan er meerdere in gebruik zijn. Enkele voorbeelden uit dergelijke tests zijn de volgende:

Voorbeeld 1 (ontleend aan Van Meel-Jansen, 1976)
Geef aan in welk van de complexe figuren de meest linkse figuur terug te vinden is.

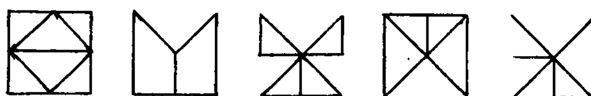


Voorbeeld 2 (ontleend aan Cashdan en Lee, 1976, afkomstig van Witkin)
Zoek steeds de linkse figuur in de er naast staande meer complexe figuur.



Voorbeeld 3 (de oorspronkelijke test bestaat uit 200 figuren)
Geef door een kruisje aan in welke tekening deze figuur zit. De figuur moet altijd in deze stand staan, dus niet op z'n kant of ondersteboven.

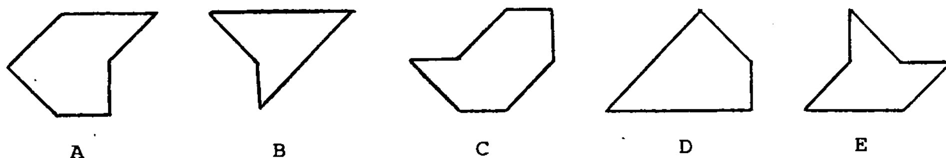


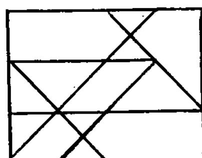


Voorbeeld 4 (1962; Educational Testing Service)

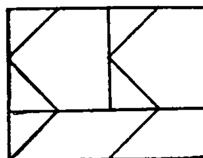
Bovenaan staan vijf eenvoudige figuren aangeduid met de letters A, B, C, D en E. Ond deze rij figuren volgt een 'bladzijde' met patronen. Onder ieder patroon staat weer een rij letters. Kruis de letter aan van de figuren die u in het patroon ziet.

N.B. Er staat slechts een van de figuren in ieder patroon, deze figuur staat altijd rechtop en heeft dezelfde grootte als een van de vijf figuren A, B, C, D en E.





A B C D E



A B C D E

II Problemen in het onderwijs, enkele suggesties

'Ik zie door de bomen het bos niet meer, maar Hans en Grietje zagen door het bos die ene boom niet meer.'

Voorval 1

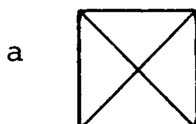
De stencilmachine is kapot en het proefwerk wordt aan het begin van de les snel op het bord gekalkt. De resultaten zijn duidelijk minder dan verwacht.

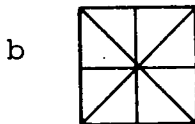
Voorval 2

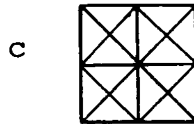
Er worden opgaven over ruimtelijke figuren (kubus) gemaakt.
Jan: 'Meneer, mag ik de plastic kubus er bij hebben?'
Els: 'Ach joh, dat zie je toch zo!'
Drie weken later na een proefwerk:
Leraar: 'Jan, je hebt dit toch niet zo goed gedaan, terwijl je er toch niet zo'n moeite mee had.'
Jan: 'Ja, meneer, maar u stond de hele tijd voor het aquarium.'

Voorval 3

Hoeveel gelijkbenige rechthoekige driehoeken kun je in elk van de volgende figuren vinden?

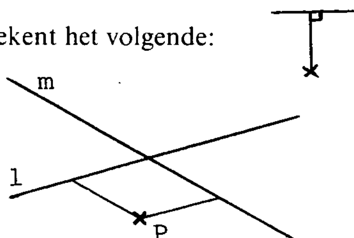
a 

b 

c 

Bij deze opdracht zijn er leerlingen die bij figuur c in de telmoeilijheden komen omdat het grote aantal lijnen hen in verwarring brengt.

Voorval 4
De leerlingen hebben de afstand van een punt tot een lijn getekend. In een volgende opgave moeten zij de afstand van P tot l én de afstand van P tot m tekenen.
Een aantal leerlingen tekent het volgende:



Voorval 5
De leraar behandelt Z-hoeken.
Jan: 'Meneer, ik zie wel de Z, maar waar zitten nu die hoeken?'

Voorval 6
De lerares wil het verschuiven van grafieken behandelen en het verband tussen de bijbehorende functievoorschriften. Als eerste heeft ze een tabel laten invullen.

$f: x \to x^2$

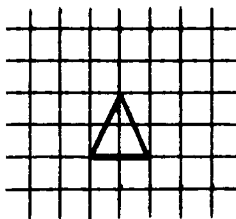
$g: x \to (x + 3)^2$

x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	1	4	9	16	25	36
$g(x)$	16	25	36	49	64	81

Henk: 'Maar, wat heeft $f(x)$ nu met $g(x)$ te maken?'

Voorval 7
De leerlingen in 4 havo moeten het snijpunt berekenen van de lijnen l en m met vectorvoorstelling $\binom{x}{y} = \lambda\binom{-1}{2}$, *respectievelijk* $\binom{x}{y} = \binom{1}{4} + \mu\binom{-3}{2}$.
Daphne heeft wat slordig gerekend, maar krijgt op haar papier uiteindelijk twee getallen, $3\frac{1}{2}$ en $1\frac{1}{2}$.
Leraar: 'Wat zijn de coördinaten van het snijpunt?'
Daphne: '$(3\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2})$?'

Voorval 8
De leerlingen zijjn gewend op roosterpapier te tekenen. Bij de opdracht 'teken een gelijkzijdige driehoek' maken verschillende leerlingen het volgende plaatje.



Voorval 9
Leerlingen hebben gewerkt aan het hoofdstuk 'machten' en krijgen nog enkele gemengde opgaven, die redelijk gemaakt worden. Dan komen de volgende opgaven, waarbij zeer veel fouten gemaakt worden.
$(3a)^3 + 3a^3 =$
$(3a)^3 \cdot 3a^3 =$
$(3a)^3 : 3a^3 =$
Het is mogelijk bij ieder van deze voorvallen een analyse te geven van wat er, behalve veldafhankelijkheid, nog meer een rol speelt. Eveneens is het mogelijk er een aantal suggesties uit te halen over hoe om te gaan met veld-(on)afhankelijkheid. Ik wil dat niet doen, maar volstaan met (een bewerking) van een door Prof. Geensen samengesteld overzicht en enkele door haar daaraan gekoppelde opmerkingen over werkvormen:

Voor het onderwijs relevante verschillen tussen veldafhankelijken en veldonafhankelijken

De voor het onderwijs relevante kenmerken van meer globaal-ingestelde, veldafhankelijke leerlingen versus de analytisch-werkende, veldonafhankelijke leerlingen kunnen – gebruik makend van een meer-minder indeling – als volgt worden samengevat.

Structureren
Veldonafhankelijken zijn beter in staat dan veldafhankelijken om zelf structuur aan te brengen in leermateriaal en studeergedrag. (Hierbij kunnen we o.a. denken aan het maken van overzichten, het zien van verbanden, etc. Maar ook aan het goed verdelen van huiswerk, etc.)

Zelfstandig resp. samen werken
Veldonafhankelijken kunnen over het algemeen goed alleen werken. Ze hebben, in tegenstelling tot veldafhankelijken, soms een uitgesproken hekel aan groepswerk. Veldafhankelijken zijn zeer gesteld op sociale contacten met medeleerlingen en de docent. Ze lossen ook probemen graag in paren op, terwijl veldonafhankelijken bij probleemoplossen liever zelfstandig werken.

Concentratie
Veldonafhankelijken werken veelal systematisch, accuraat en geconcentreerd. Dit in tegenstelling tot de veldafhankelijken die snel afgeleid zijn en vaak slordig en chaotisch werken.

Verantwoordelijkheid
De veldonafhankelijken willen graag zelf verantwoordelijk zijn, terwijl de veldafhankelijken de verantwoordelijkheid voor onderwijs, eigen gedrag en prestaties liever bij de docent laten.

Gevoeligheid voor oordelen
De veldonafhankelijken zijn over het algemeen meer dan de veldafhankelijken

gevoelig voor hun eigen oordeel waardoor ze zelfstandiger zijn ten opzichte van medeleerlingen. Ze laten zich minder sterk door anderen beïnvloeden. Veldafhankelijken hebben een grotere behoefte dan veldonafhankelijken aan aanmoedigingen, beloningen en straffen.

De voorkeur[3]) van meer veldafhankelijke versus meer veldonafhankelijke leerlingen voor bepaalde werkvormen, onderwijs- en schoolorganisatie zijn uit deze kenmerken verklaarbaar.
Veldafhankelijken verkiezen duidelijke instructie, gestructureerd aangeboden leerstof, een gestructureerde en controlerende benadering door docent en school. Daarbij hebben ze een grote behoefte aan een warme, accepterende en stimulerende benadering.
Ze prefereren meer dan de veldonafhankelijken onderwijs met groepsdiscussies en groepswerk[4]), waarbij de docent duidelijk (voor)structurerend, leidend en begeleidend optreedt. Ze hebben bovendien liever dat een docent leerstofproblemen uitlegt dan dat ze deze zelf moeten proberen op te lossen. Hun voorkeur en hun mogelijkheden liggen dus nóch bij het traditionele, frontale, zakelijk-ingestelde onderwijs, nóch bij de modernere vormen van onderwijs, waarbij de nadruk ligt op eigen verantwoordelijkheid en eigen keuzen en zelfstandigheid. Ook de zogenaamde ontdekkingsmethode is voor hen minder geschikt, vinden ze althans niet prettig. Veldonafhankelijke, meer analytisch ingestelde leerlingen werken liever alleen en zelfstandig. Zowel frontaal onderwijs met veel nadruk op zelfwerkzaamheid en zelf-problemen-oplossen, veel aandacht voor het abstracte en het theoretische, als zeer open onderwijs waarin eigen verantwoordelijkheid centraal staat, zijn voor hen veel meer geschikt en worden door hen als prettiger ervaren. (wordt vervolgd)

Noten

[1]) a In navolging van Dr. P. R. J. Simons (Kath. Hogeschool Tilburg) wil ik onder leerstijl verstaan 'de geprefereerde of habituele wijze van informatieverwerking bij het leren'. Een leerstijl heeft dus zowel betrekking op de door de lerende bij voorkeur gehanteerde wijze van informatie verwerken als op de wijze die een lerende het beste aankan. Zie de bundel 'Strategieën in leren en ontwikkeling', Swets en Zeitlinger b.v.
b Een inleidend artikel over leerstijlen is te vinden in de Docentengids onder categorie 8 'Onderwijskundige Onderwerpen'.

[2]) Zie enkele voorbeelden hiervan in H. Broekman, 'Wat bepaalt ons handelen?' Euclides 59, nr. 9, p. 421.

[3]) Het verdient zeker aanbeveling aan te sluiten bij de voorkeuren van de leerlingen. Gezien vanuit leerpsychologische overwegingen, maar ook gezien bepaalde doelstellingen (zoals b.v. leren samenwerken) kan het nodig zijn af te wijken van de voorkeuren. Dat er veelal voor een afwisseling gepleit wordt is dan ook niet verwonderlijk.

[4]) Het is eveneens mogelijk naar de werkvormen etc. te kijken vanuit de optiek van de ontwikkeling van het kind tot volwassene. Zo zou volgens de Rus Vygotsky voor de kinderen in de leeftijd van 10 tot 16 jaar de gerichtheid op de interactie met leeftijdsgenoten sterk zijn. Als gevolg daarvan zou samenwerking een geschikte groeperingsvorm zijn. Coöperatief leren wordt ook gepropageerd vanuit het idee dat de denkontwikkeling gestimuleerd kan worden door het werken aan opgaven waarbij tegenstellingen moeten worden opgelost (oproepen van zgn. cognitief conflict). Van het oplossen van deze tegenstellingen in groepsverband kan dan een grote stimulans uitgaan.

De 22ste Nederlandse Wiskunde Olympiade 1983

J. VAN DE CRAATS, H. N. SCHURING

De eerste ronde

Aan alle scholen voor HAVO en VWO is verzocht op vrijdag 18 maart 1983 de eerste ronde te organiseren. Gedurende drie uren werden de deelnemers in de gelegenheid gesteld 13 opgaven op te lossen. Voor de score telden slechts de goede antwoorden. De maximale score was 36 punten.
De wedstrijdleiders van 237 scholen hebben het uitslagenformulier tijdig opgestuurd, zodat het resultaat van 2556 deelnemers in onderstaand overzicht verwerkt kon worden.
De cesuur is gelegd bij score 21, d.w.z. de deelnemers van niet-eindexamen klassen die 21 of meer punten behaalden, werden uitgenodigd voor de tweede ronde op 16 september 1983.

De scoreverdeling was als volgt:

score	frequentie	cumulatieve frequentie	score	frequentie	cumulatieve frequentie
36	1	1	20	16	117
35	0	1	19	38	155
34	1	2	18	28	183
33	3	5	17	60	243
32	4	9	16	53	296
31	0	9	15	66	362
30	2	11	14	79	441
29	2	13	13	72	513
28	3	16	12	117	630
27	8	24	11	92	722
26	6	30	10	172	894
25	8	38	9	170	1064
24	6	44	8	159	1223
23	23	67	7	209	1432
22	13	80	6	115	1547
21	21	101	5	241	1788
			4	206	1994
			3	51	2045
			2	391	2436
			0	120	2556

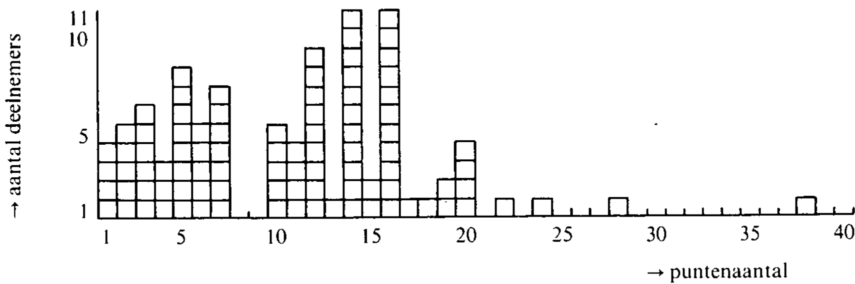
Van de 101 deelnemers met 21 of meer punten waren er:
78 leerling van 5 VWO, 15 leerling van 4 VWO, 1 leerling van 4 HAVO en 7 leerling van een eindexamenklas, zodat 94 deelnemers uitgenodigd zijn om aan de tweede ronde deel te nemen.
Er is een prijs, beschikbaar gesteld door Shell, voor die school waarvan de som van de scores van de beste vijf deelnemers van die school het hoogste is van alle scholen. Deze wisselprijs is op 10 juni 1983 uitgereikt aan het Kottenparkcollege te Enschede; de vijf deelnemers behaalden samen 109 punten.
Over het algemeen vonden de docenten de opgaven van de eerste ronde moeilijker dan vorig jaar, terwijl men kritiek had op opgave A2: je moet maar weten dat de som van de ogenaantallen van overstaande zijvlakken van een dobbelsteen 7 is en opgave A4: de cent is geen wettig betaalmiddel meer. (De opgaven waren reeds vermenigvuldigd voordat het betreffende regeringsbesluit afgekondigd werd).

De tweede ronde

Op 16 september 1983 is te Utrecht de tweede ronde gehouden.
De 94 geselecteerde deelnemers van de eerste ronde zijn hiervoor uitgenodigd. Ook kregen 5 deelnemers van de Pythagoras Olympiade, die niet in een eindexamenklas zaten, een uitnodiging. Vijf kandidaten waren verhinderd zodat 94 deelnemers zich gedurende drie uren gebogen hebben over de vier opgaven. De maximale score per opgave was 10 punten.
Door bij gelijke eindscore rekening te houden met het behaalde puntenaantal in de eerste ronde, zijn de volgende tien deelnemers prijswinnaars van de Nederlandse Wiskunde Olympiade 1983:

1.	Jan de Boer, Sint Nicolaasga	38 punten
2.	Gerard van Mazijk, Den Burg	28 punten
3.	Machiel van Frankenhuysen, Nijmegen	24 punten
4.	Koen Versmissen, Waalre	22 punten
5.	Bart de Smit, Amsterdam	20 punten (1e ronde 34)
6.	Menke Ubbens, Sneek	20 punten (1e ronde 32)
7/8.	Hans van Antwerpen, Nuenen	20 punten (1e ronde 21)
7/8.	Rudi Hakvoort, Delft	20 punten (1e ronde 21)
9.	Wiebe Kees Goodijk, Hardegarijp	20 punten (Pythagoras)
10.	Harold de Boer, Nijeveen	19 punten (1e ronde 27)

Het onderstaande staafdiagram geeft een overzicht van de scores van alle deelnemers aan de tweede ronde:



Tenslotte volgen hierna de opgaven en uitwerkingen van de tweede ronde.

1 Een lijn door het hoekpunt A verdeelt driehoek ABC in twee gelijkbenige driehoeken. Gegeven is dat een van de hoeken van driehoek ABC gelijk is aan 30°.
Bereken in alle mogelijke gevallen hoe groot de andere hoeken van de driehoek kunnen zijn.

2 Bewijs dat

$$2^{2n}(2^{2n+1} - 1)$$

voor elk oneven natuurlijk getal n een getal is dat eindigt op 28 als het in het tientallig stelsel wordt uitgeschreven.

3 Gegeven zijn vier reële getallen a, b, c en p.
De getallen a, b en c zijn niet alle drie gelijk. Verder geldt dat

$$a + \frac{1}{b} = b + \frac{1}{c} = c + \frac{1}{a} = p.$$

Bepaal alle mogelijke waarden van p en bewijs dat $abc + p = 0$.

4 Binnen een gelijkzijdige driehoek met zijden van lengte 15 zijn 111 punten gekozen.
Bewijs dat het – hoe die punten ook gekozen zijn – altijd mogelijk is een ronde munt met diameter $\sqrt{3}$ ergens op de driehoek te leggen op zo'n manier dat de munt minstens drie van de gekozen punten bedekt. (De munt mag gedeeltelijk buiten de driehoek liggen.)

Oplossingen N. W. O. 1983, 2e ronde

1 Stel D is het punt waar de lijn door A de zijde BC snijdt. De driehoeken ADB en ADC zijn gelijkbenig, zeg met tophoeken resp. T_1 en T_2 (de tophoek is de hoek waar de twee gelijke benen samenkomen). Er zijn nu negen gevallen denkbaar:

T_2 \ T_1	A	D	B
A	X	1	X
D	1	3	2
C	X	2	X

De gevallen 'X' zijn echter onmogelijk:
$T_1 = T_2 = A$ omdat dan B, D en C niet op één lijn kunnen liggen,
$T_1 = B$, $T_2 = A$ omdat dan $\angle B + \angle C = $
$= \angle ADB + \angle ADC = 180°$ zou zijn,
$T_1 = C$, $T_2 = A$ om soortgelijke reden,
$T_1 = B$, $T_2 = C$ omdat dan $BC < AB + AC = DB + DC = BC$ zou zijn.
In de redenering spelen B en C dezelfde rol, dus we behoeven nu nog slechts drie gevallen te onderzoeken:
1. $T_1 = D$, $T_2 = A$,
2. $T_1 = B$, $T_2 = D$,
3. $T_1 = T_2 = D$.

Geval 1: (maak zelf een tekening!) Dan geldt voor de hoeken van de driehoek: $C = 2B$, $A = 180 - 3B$. Als één van de hoeken 30 is, geeft dit als mogelijkheden:
1.1: $A = 90$, $B = 30$, $C = 60$ (alles in graden).
1.2: $A = 135$, $B = 15$, $C = 30$.
1.3: $A = 30$ zou leiden tot $B = 50$, maar B moet kleiner zijn dan A, dus dit is onmogelijk.
Geval 2: In dit geval geldt $A = 3C$ en $B = 180 - 4C$.
2.1: $A = 30$, $B = 140$, $C = 10$.
2.2: $B = 30$, $C = 37\frac{1}{2}$, $A = 112\frac{1}{2}$.
2.3: $C = 30$, $A = 90$, $B = 60$ (zelfde als geval 1.1).
Geval 3: Dan moet A recht zijn, en dat leidt weer tot een 30-60-90 driehoek.

Er zijn dus vier verschillende gevallen mogelijk (1.1, 1.2, 2.1 en 2.2).

2 Voor $n = 1$ klopt het.
Stel dat we voor zekere oneven n bewezen hebben dat $f(n) = 2^{2n}(2^{2n+1} - 1)$ eindigt op 28. Als we n met 2 vermeerderen, ontstaat
$f(n + 2) = 2^{2(n+2)}(2^{2(n+2)+1} - 1) = 16 \cdot 2^{2n}(16 \cdot 2^{2n+1} - 1) =$
$= 16 \cdot 2^{2n}(16(2^{2n+1} - 1) + 15) = 256 \cdot 2^{2n}(2^{2n+1} - 1) + 16 \cdot 15 \cdot 2^{2n} =$
$= 256 \cdot 2^{2n}(2^{2n+1} - 1) + 240 \cdot 4^n$.
Omdat $2^{2n}(2^{2n+1} - 1)$ eindigt op 28, eindigt $256 \cdot 2^{2n}(2^{2n+1} - 1)$ op 68.
Verder geldt: de machten van 4 eindigen afwisselend op 4 en op 6; de oneven machten eindigen allemaal op 4. Als n oneven is, eindigt $240 \cdot 4^n$ dus op 60.
Daarom eindigt $f(n + 2)$ ook op 28.
Omdat $f(1)$ eindigt op 28, geldt hetzelfde voor $f(3)$, $f(5)$, $f(7)$, ..., dus voor alle $f(n)$ met oneven n.

3 Uit de opgave blijkt dat $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$. Ook moet gelden dat $p \neq 0$ want anders was $b = -\frac{1}{a} = -\frac{1}{c}$ dus $c + \frac{1}{c} = 0$; kan niet.

We hebben $ab + 1 = bp$,

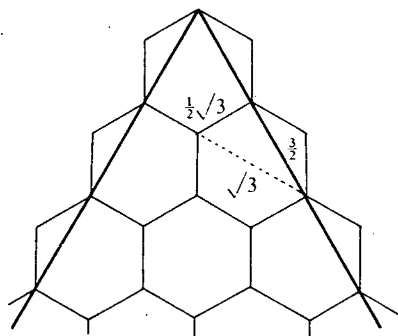
$bc + 1 = cp$,

dus $cp^2 = bpc + p = (ab + 1)c + p = abc + p + c$, dus $c(p^2 - 1) = abc + p$.
Evenzo bewijs je $a(p^2 - 1) = abc + p$, en $b(p^2 - 1) = abc + p$.
Omdat a, b en c niet alle drie gelijk zijn, volgt hieruit

$p^2 - 1 = 0$ en $abc + p = 0$.

Inderdaad kunnen de waarden $p = \pm 1$ beide worden aangenomen, bijvoorbeeld voor $(a, b, c) = (\pm 2, \mp 1, \pm \frac{1}{2})$.

4 Zo'n gelijkzijdige driehoek kan precies bedekt worden door een honingraatpatroon van $1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + 10 = 55$ regelmatige zeshoeken met een diameter van $\sqrt{3}$ (zie de figuur).
In minstens één van die zeshoeken moeten *drie* van de gekozen punten liggen.
Plaats de munt precies zo, dat hij die zeshoek bedekt.



Mededeling

Nederlandse Wiskunde Olympiade 1984

Op grond van de resultaten van 1841 deelnemers van 172 scholen aan de eerste ronde is de cesuur gelegd bij score 16, d.w.z. dat de deelnemers van niet-eindexamenklassen die 16 of meer punten behaald hebben in die eerste ronde in aanmerking kunnen komen voor deelname aan de tweede ronde in september a.s.
De school met het hoogste puntentotaal van de beste 5 deelnemers van die school is de RSG 'Schoonoord' te Zeist, die dit jaar de wisselprijs gewonnen heeft.

H. N. Schuring, secretaris

ATM, girls and maths

Impressie

RIJKJE DEKKER, FRANCIS MEESTER

'Welcome in sunny Bognor', zo werden we onthaald op het congres van de Association of Teachers of Mathematics in Bognor Regis, Zuid-Engeland (Pasen 1983) en wij en de hele zaal antwoordde met een flink gelach. Buiten plensde het werkelijk van de regen. Drijfnat was iedereen aangekomen: docenten van basisscholen, voortgezet onderwijs, opvallend veel vrouwen. Allemaal hadden we een gedeelte van de paasvakantie opgeofferd om aan dit congres deel te nemen. En waarom? 'We know you all came here for Bognors bright night-life' wist de organisatie ons te vertellen. Tekenend voor de sfeer die vier dagen lang ontspannen, humoristisch en uitnodigend was.

De eerste workshops waar ieder elkaar temidden van allerlei kleuren papier, scharen en lijm, al samenwerkend kon leren kennen heette: 'create your own problems'. Dat was natuurlijk al een probleem op zich maar dat gaf helemaal niet want er was gelukkig geen sfeer van wiskundige hoogstandjes en elkaar de loef afsteken.

Wij waren naar dit congres gegaan omdat er een seminar 'girls and maths' naast andere seminars gehouden werd. Ook wilden we contact leggen met de Engelse groep Gamma: Girls and Mathematics Association. Uitvoerig spraken we met Zelda Isaacson, één van de treksters van Gamma. Zij vertelde ons dat Gamma in mei 1981 een eerste bijeenkomst over meisjes in het wiskundeonderwijs in London had. Nu hebben ze twee landelijke dagen per jaar waaraan een nieuwsbrief voorafgaat met allerlei aktiviteiten, onderzoeken en boekbesprekingen. Gamma is een open organisatie zonder banden met een wiskundevereniging. Ieder kan voor £2,– lid worden. Nu in april is er vanuit Emancipatiezaken subsidie gegeven voor een secretariaat met een betaalde kracht om alle informatie te bundelen en bij te houden. De ontwikkelingen gaan hard. De nieuwsbrieven doorlezend lijkt het alsof er in Engeland op veel plaatsen veel gebeurt op het gebied van meisjes en wiskunde: leerplanontwikkeling, nascholing en onderzoek. Wat deze punten betreft lijken we in Nederland aanzienlijk achter te lopen. Behalve de groep Vrouwen en Wiskunde, een enkele β-plaats op een universiteit en het MENT-projekt in Eindhoven lijkt er in Nederland nog niet veel aan bewustwording en nascholing te gebeuren. Of komen de informatie en aktiviteiten niet naar buiten?

Voor de werkgroep Girls and Maths waren drie bijeenkomsten gepland:

1 Oriëntatie en informatie met behulp van cijfers en onderzoek over de deelname van meisjes aan het wiskundeonderwijs.

2 Verschillende video-opnamen over interaktie in de klas.
3 Strategieën bedenken en bespreken, ideeën aan elkaar uitwisselen om verandering in de slechte deelname van meisjes aan het wiskundeonderwijs te bereiken.

Ruth Townsend en Alan Beales hadden de leiding en dat deden ze heel goed. Ze wisten ons, een groep van ± 20 vrouwen en mannen, echt te stimuleren zodat veel aanwezige kennis en ervaringen benut werden.

Een aantal ervaringen en gegevens zijn hetzelfde als in Nederland: Hoe hoger de opleiding na het V.O., hoe minder meisjes in de exacte vakken. Opleiding, socialisatie, maatschappelijke verwachtingen, moment van keuze, beeld van wiskunde, faalangst, angst voor succes, al die belemmeringen kwamen ook hier naar voren.

Maar er waren ook verschillen. Hoewel we geen goed beeld kregen van wat er nu feitelijk in het Engelse wiskundeonderwijs gebeurt, lijkt het toch of we in Nederland een stuk verder zijn met het ontwikkelen van contextrijke wiskunde waar kinderen in heterogene groepen aan kunnen werken. Hoewel voor het specifieke naar meisjes nog een heel terrein braak ligt. Het lijkt alsof ze in Engeland stappen verder zijn in onderzoek en bewustwording van gedrag van de docent in de klas en haar/zijn invloed op jongens en meisjes. Met name de discussies naar aanleiding van de video-opname leverde veel suggesties op:

'Zie je hoeveel aandacht die jongen vraagt en krijgt?'
'Zie je hoe dat meisje rustig afwacht totdat de docent tijd voor haar heeft?'
'Ik geef meisjes heel bewust meer aandacht dan jongens' zei een leraar, 'dan hoop ik dat ik redelijk neutraal uitkom'.
'Als ik rekenmachines uitdeel zorg ik dat ieder meisje er één in haar hand krijgt, dan kunnen ze het werken ermee niet vermijden'.

Zo verliepen de discussies in deze workshop. Veel voorbeelden, suggesties, meedenken met elkaar. Aldoor gericht op het vergroten van de deelname van meisjes aan het wiskundeonderwijs. Wij hadden, geïnspireerd door ons vele praten vooraf, in deze discussie een heel eigen inbreng: Hoe maak je het wiskundeonderwijs aantrekkelijk voor meisjes? Hoe vergroot je hun inbreng, benut je hun sterke kanten? Wat zijn hun sterke kanten?

Inlevingsvermogen dachten we. Je inleven in reële situaties, gevoel voor details, precies willen weten, verifiëren in de meest gewone betekenis: het nieuwe onbekende je toeëigenen door het te vergelijken met wat je al weet, kent. Dus geen truukjes en loze begrippen maar betekenisvolle, inzichtelijke wiskunde. En dan geen saaie contexten voor het 'gemiddelde' kind maar rijk geschakeerd, met durf gekozen uit alle facetten van het leven.

Je inleven in anderen, elkaar begrijpen, leren uit te glijden en te schitteren, elkaar optrekken. Dus geen super-individuele voorgestructureerde wiskunde maar ruimte voor de sociale kant van het leren, open problemen, groepswerk.

We willen dus gewoon een menselijker wiskunde. Het gevoel en de sociale kant van het leren er echt in. Want wat vraag je eigenlijk van een kind als je dat niet doet? Wat leer je ze dan? Geamputeerd denken?

Gamma, University of London, Institute of Education, 58 Gordon Square, LONDON WCIH ONT

Variabelen en formules in de brugklas; generaliseren

ERNIC KAMERICH

Inleiding

Dit artikel gaat over het introduceren van variabelen en formules in de brugklas. De achtergrond hierbij is de centrale rol van functies in de wiskunde en de vanzelfsprekende wijze waarop functies spontaan gemaakt worden door brugklasleerlingen bij het generaliseren [1]. Daarnaast komt het analyseren van en omgaan met formules in de brugklas aan de orde.

1. Het maken van formules

In een vorig artikel [1] heb ik u verteld over één van mijn beginlessen in een brugklas: In die les gingen leerlingen op zoek naar een handige manier om het aantal huizen aan de oneven-nummer-kant van een straat te berekenen uit het hoogste huisnummer. Ik heb in grote lijnen beschreven hoe de leerlingen groeiden naar het inzicht, dat je het aantal huizen zó kunt berekenen:

neem het hoogste nummer
tel daar 1 bij op
deel het resultaat door 2.

Dit kan kort worden genoteerd als een serie rekenstappen:

$$\text{hoogste nummer} \xrightarrow{+1} \xrightarrow{:2} \text{aantal huizen.}$$

Dit leidde gemakkelijk tot een formule:

$$\text{hoogste nummer} \xrightarrow{+1} \text{hoogste nummer} + 1 \xrightarrow{:2} (\text{hoogste nummer} + 1):2$$

dus

$$\text{aantal huizen} = (\text{hoogste nummer} + 1):2.$$

Namen van variabelen hoeven hier nog niet beperkt te zijn tot één-letter-namen: er kan toch geen verwarring ontstaan door het weglaten van vermenigvuldigingstekens (bijvoorbeeld tussen 'nr' en 'n.r.'). Zeker in dit stadium zijn langere namen voor variabelen veel sprekender; deze komen de duidelijkheid ten goede.

(Later zullen veel leerlingen ook weer langere namen gebruiken voor variabelen bij het programmeren!)
Door generalisaties van oplossingen van problemen zoals genoemd in voorbeeld 1 komen *variabelen als natuurlijk taalmiddel bij het generaliseren* naar voren en niet als ongrijpbare abstracties in de vorm van 'getallen-die-je-niet-kent'. Dat komt tot uiting in de vanzelfsprekende wijze waarop leerlingen na een introductie met dergelijke voorbeelden gaan redeneren met variabelen.

Natuurlijk werkt zoiets alleen goed als de leerlingen verscheidene van dergelijke generalisatie-processen meemaken en daarin telkens een actiever aandeel kunnen nemen. Ik zie wel uit naar de tijd waarin je leerlingen van een brugklas aan computers kunt zetten: het maken van formules wordt dan een zichtbaar nuttige bezigheid.
Het blijkt aanvankelijk voor veel leerlingen moeilijk min of meer op eigen kracht formules te maken. Het bovenstaande voorbeeld geeft goed aan hoe leerlingen relatief soepel naar zo'n formule kunnen werken:

i eerst concreet rekenen, met steeds grotere getallen, waardoor systematisch rekenen nodig wordt en de leerling los komt van de variabele gegevens*;
ii dan de rekenstappen formuleren. Die rekenstappen houd ik in de brugklas vóór behandeling van machten beperkt tot de volgende typen:
  - een zeker getal erbij optellen of er van aftrekken
  - vermenigvuldigen met of delen door een zeker getal
  - het tegengestelde nemen
  - en eventueel: het omgekeerde nemen.

Iedere rekenstap noteer ik door een pijl met daarboven een specificatie van de stap. Als notatie van 'het tegengestelde nemen' heb ik gekozen: '$\xrightarrow{+/-}$';

iii tenslotte met behulp van die serie rekenstappen een formule stapsgewijs opbouwen.

Naar mijn ervaring kun je leerlingen efficiënt begeleiden bij het maken van een formule door hen te stimuleren stuk voor stuk deze drie fasen te doorlopen. Het formuleren van de serie rekenstappen bleek daarbij van essentieel belang te zijn.

2. Formules analyseren

In het tweede voorbeeld van 'Problemen oplossen in de brugklas' [1] hebben we de oplossing van een zekere vergelijking in één variabele geanalyseerd en daaruit een vaak te gebruiken algemene oplossingsweg gedestilleerd:

a Probeer de vergelijking om te zetten in een equivalente vergelijking van type:
  Los op: $?y \in A : f(y) = a$
  waarbij f een functie met domein A is.
b Probeer nu f te zien als een samenstelling van gemakkelijk hanteerbare

* Dat die getallen echt groot moeten zijn wordt wel gesuggereerd door een voorval in het begin van een brugklas: Als introductie op een telprobleem vroeg ik de leerlingen hoeveel bladzijden er in één van hun leerboeken zaten, te beginnen bij blz. 7 en doorgaand tot en met blz. 168.
Alle (!) leerlingen gingen hierop ijverig bladeren en bladzijde voor bladzijde tellen, tot ik ze na enige minuten onderbrak!

functies; loop dan stapsgewijs terug van beeld naar volledig origineel.
(Die heuristiek formuleer ik wel ongeveer zó in de hogere klassen; in een brugklas hoort ze alleen bij de achtergrond van mijn didactisch handelen.)
Ter illustratie volgt hier nog een voorbeeld van een toepassing van deze heuristiek buiten de brugklasstof:

Los op: $?x \in \mathbb{R}$: $2 \cdot (x-3)^2 - 13 < 0$.

Eerst ontleed ik het linkerlid in elementaire rekenstappen:

$$x \xrightarrow{-3} x-3 \xrightarrow{\text{kwadr}} (x-3)^2 \xrightarrow{\times 2} 2 \cdot (x-3)^2 \xrightarrow{-13} 2 \cdot (x-3)^2 - 13$$

Van rechts naar links werkend vind ik nu de oplossingsverzameling van bovenstaande ongelijkheid:

$$x \xrightarrow{-3} x-3 \xrightarrow{\text{kwadr}} (x-3)^2 \xrightarrow{\times 2} 2 \cdot (x-3)^2 \xrightarrow{-13} 2 \cdot (x-3)^2 - 13$$

$$\langle -\sqrt{6\tfrac{1}{2}}+3, \sqrt{6\tfrac{1}{2}}+3\rangle \quad \langle -\sqrt{6\tfrac{1}{2}}, \sqrt{6\tfrac{1}{2}}\rangle \quad \langle \leftarrow, 6\tfrac{1}{2}\rangle \quad \langle \leftarrow, 13\rangle \quad \langle \leftarrow, 0\rangle$$

$$\xleftarrow{+3} \quad \xleftarrow{\text{pas op}} \quad \xleftarrow{:2} \quad \xleftarrow{+13}$$

Natuurlijk is deze oplossing precies dezelfde als:
Voor $x \in \mathbb{R}$: $2 \cdot (x-3)^2 - 13 < 0 \Leftrightarrow$
$2 \cdot (x-3)^2 < 13 \Leftrightarrow$
$(x-3)^2 < 6\tfrac{1}{2} \Leftrightarrow$
$-\sqrt{6\tfrac{1}{2}} < x-3 < \sqrt{6\tfrac{1}{2}}$
$-\sqrt{6\tfrac{1}{2}} + 3 < x < \sqrt{6\tfrac{1}{2}} + 3$

In de derde equivalentie komt echter duidelijk naar voren, dat de oplossing essentieel bestaat uit het vinden van het volledig origineel van een zekere verzameling voor een zekere functie. Die essentie wordt benadrukt in de eerste manier van opschrijven van deze oplossingsweg. Bovendien wordt hier het werk gesplitst in 2 delen:

- het ontleden van de formule,
- het terug lopen.

Het vinden van een oplossingsweg en het vermijden van foute stappen zoals

'$2 \cdot (x-3)^2 < 13 \Leftrightarrow -\sqrt{13} < 2 \cdot (x-3) < \sqrt{13}$'

bestaat hier in feite uit een goede ontleding van de gegeven formule.
Wat ik hier 'formules ontleden' noem is in feite natuurlijk het zien van een functie als eén *samenstelling* van (gemakkelijk hanteerbare) functies; dat is een zeer algemeen hulpmiddel om functies te bestuderen en het speelt ook op veel plaatsen in de schoolwiskunde een belangrijke rol. Daarom is het de moeite waard om op allerlei plaatsen in de schoolstof expliciete oefeningen in het ontleden van formules in te lassen, te beginnen in de brugklas.

Ik beperk me nu even tot formules/functies in één variabele. Er zijn dan in wezen 2 soorten oefeningen mogelijk:

i formules (met één variabele) maken uit een serie rekenstappen. Dit is in het begin van de brugklas tevens een welkome gelegenheid tot het verder introduceren van variabelen, bijvoorbeeld in combinatie met het invullen van tabellen:

	0	1	2	3	4	5	a
$+3$							
	3	4	5	6	7	8	$a+3$
$\times 2$							
	6	8	10	12	14	16	$(a+3)\cdot 2$

ii bij een gegeven formule met één variabele een serie rekenstappen construeren (waarbij zo nodig eerst de formule moet worden herleid tot een hiervoor geschikte formule van dezelfde functie). Dat kan goed als volgt verlopen:
- substitueer enkele getallen in de formule
- ga na, hoe je telkens rekent
- schrijf de rekenstappen op.

In feite wordt deze manier van werken gestuurd door de heuristiek van het oplossen van speciale gevallen en dan via systematiseren komen tot inzichtelijk generaliseren (en deze vervolgens toepassen) [1].

Het blijkt geen probleem te zijn om zo brugklasleerlingen te leren formules van behoorlijke complexiteit te ontleden. Voorbeeld:

$$p \to 5 - 2 \cdot (3 \cdot p + 2):$$

Je kunt die functie bijvoorbeeld zó ontleden:

$$p \xrightarrow{\times 3} 3 \cdot p \xrightarrow{+2} 3 \cdot p + 2 \xrightarrow{\times -2} -2 \cdot (3 \cdot p + 2) \xrightarrow{+5} 5 + (-2) \cdot (3 \cdot p + 2).$$

In dat geval moet er tevoren worden herleid:
Voor ieder getal p:
$5 - 2 \cdot (3 \cdot p + 2) = 5 + -2 \cdot (3 \cdot p + 2) = 5 + (-2) \cdot (3 \cdot p + 2)$.
Vindt u die laatste stap pietepeuterig? Vond ik ook, maar mijn brugklasleerlingen hebben me op de vingers getikt:
zij lezen het tweede lid terecht als
$5 + -(2 \cdot (3 \cdot p + 2))$.
Ik heb mijn slordigheid toegegeven en let er nu voortaan op. In het bovenstaande geval voorkom ik liever de problemen door zó te ontleden:

$$p \xrightarrow{\times 3} 3 \cdot p \xrightarrow{+2} 3 \cdot p + 2 \xrightarrow{\times 2} 2 \cdot (3 \cdot p + 2) \xrightarrow{+/-} -2(3 \cdot p + 2) \xrightarrow{+5} 5 + -2 \cdot (3 \cdot p + 2).$$

3 De rekenvolgorde

Veel fouten van leerlingen hebben te maken met de rekenvolgorde. Ik heb de indruk dat dergelijke fouten vaak te wijten zijn aan een verkeerde houding:

a Vaak zag ik leerlingen rekenen met volledige verontachtzaming van volgordekwesties en ik geloof dat voor de meeste leerlingen die ik in een brugklas heb zien beginnen de rekenvolgorde praktisch buiten het gezichtsveld lag.
Ik denk dat ook vaak fouten tegen distributiviteit zoals

'$2 \cdot (3 \cdot a - 5) = 6 \cdot a - 5$'

te wijten zijn aan nonchalance t.a.v. volgorde.

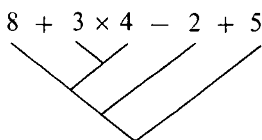
b Vaak zag ik leerlingen rekenen op basis van een gevoelsmatige/visuele ordening in plaats van op basis van de leesregels ('Mijnheer Van Dalen ...' en haakjes). Voorbeelden:

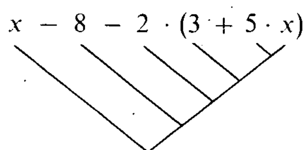
'$12 - 7 \cdot (2 - a) + 2 \cdot a = 5 \cdot (2 - a) + 2 \cdot a \ldots$'

en ook

'$812 + 25 \times 32 - 17 + 37 = 812 + 800 - 54 \ldots$'.

Sommige leerlingen maken fouten zoals in het laatste voorbeeld doordat ze menen dat er een leesregel 'optellen gaat voor aftrekken' is, maar ook worden dergelijke fouten vaak gemaakt door leerlingen die de leesregels wel goed kennen.
Het is daarom van belang om vooral in het begin van de brugklas, maar ook regelmatig daarna, te werken aan een attente houding t.a.v. volgorde en aan een goede vaardigheid in het analyseren van formules. Rekenopgaven met volgordeverwisselingen zijn natuurlijk geschikte hulpmiddelen voor een leraar om de aandacht hierop te kunnen vestigen in de lessen. Daarnaast is het naar mijn ervaring erg nuttig oefeningen te geven speciaal gericht op het analyseren van de rekenvolgorde. Het aangeven van de rekenvolgorde kan efficiënt worden gedaan met bomen. Voorbeelden:





Het analyseren van formules en rekenopgaven is in het algemeen goed aangeslagen en door veel van mijn leerlingen op allerlei plaatsen ook zelfstandig toegepast, wanneer ze formules onoverzichtelijk vonden.
In één brugklas heb ik leerlingen in het begin laten werken met een overvloed aan haakjes. Ik heb dat geïntroduceerd met behulp van een denkbeeldige rekenmachine, de 'Imago', waarop wel haakjes-toetsen zaten, maar geen = toets. Ik was verbluft hoe goed dat ging: de meeste leerlingen waren spoedig handiger met het gebruik van haakjes dan ik en zagen bijvoorbeeld geen been in rekenopgaven met vijf (gedeeltelijk geneste) paren haakjes. Het gebruik van de leesregel 'Mijnheer Van Dalen ...' bleek veel meer moeilijkheden op te leveren. Die ervaring pleit ervoor om in het begin, ook reeds bij voorbereidende rekenopgaven, haakjes niet

te schuwen en zelfs desgewenst met een surplus aan haakjes de volgorde aan te geven. In ieder geval moeten brugklasleerlingen geoefend worden om zelf haakjes te zetten om de volgorde aan te geven waar dat nodig is!

Als je in de loop van het jaar in de brugklas opgaven wilt laten maken zoals:

'Los op:.?$x \in \mathbb{Q}$: $-7(-2 + x) - 6(4 - 2x) > 15$'

(overgenomen uit 'Moderne Wiskunde' deel 2)

en

'Herleid: $2a(a - 3b + 5) - 3b(2a + 5b - 7) + 6(-a + 3b - 8)$'

(overgenomen uit Sigma, oude versie, deel 1)

dan is het geen overbodige luxe om in het begin van het schooljaar rekenopgaven te geven zoals:

'$8 \cdot (100 - 3) - 5 \cdot (32 - 2 \cdot 3) =$ '

'$2 \cdot 28 \cdot (63 - 3 \cdot 6 + 5) - 5 \cdot (2 \cdot 3 + 5 \cdot 7 - 7) + 6 \cdot (100 - 17 - 8) =$ '

en later bij het analyseren van formules, substitueren, etc., ook de opgaven niet al te simpel te houden, maar voorzichtig op te bouwen naar voldoende complexiteit.

4 Meer dan één variabele

De stap van één naar twee of meer variabelen heb ik tot nu toe telkens onderschat. Vaak heb ik leerlingen die blijk gaven van goed begrip bij het rekenen met één variabele zien vervallen tot abstract goochelen met letters zodra meerdere variabelen voorkwamen, hetgeen de bekende fouten opleverde zoals

'$10 \cdot a + 7 \cdot b = 17 \cdot a \cdot b$', etc.

Toch niet verwonderlijk: als er twee dingen onafhankelijk van elkaar kunnen variëren inplaats van slechts één, dan wordt het systeem aanzienlijk minder overzichtelijk. Je kunt een leerling die fouten zoals bovenstaande maakt wel uitleggen dat 't fout is, maar dat leidt er gemakkelijk toe, dat leerlingen proberen regels te vinden en te leren, wat er 'mag' en 'niet mag' en dan geleidelijk aan in een doolhof van dergelijke regels verdwalen. Variabelen glijden intussen weg van natuurlijk taalmiddel tot abstracte 'letters in de algebra'. Om dàt te voorkomen moet het kwaad bij de wortel worden aangepakt: het rekenen met twee of meer variabelen moet zorgvuldig en heel geleidelijk worden opgebouwd.
Bij het eerste voorbeeld in mijn artikel 'Problemen oplossen in de brugklas' [1] – over het aantal huizen aan de oneven-nummer-kant van een straat – dringt zich vanzelf het idee op om de huizenrij eens niet bij nummer 1 te laten beginnen: zo ontstaat een uitbreiding van het probleem, die leidt tot een formule in twee variabelen. Veel problemen bieden mogelijkheden tot dergelijke uitbreidingen.

Bij het schetsen van mijn behandeling van de distributiviteit van vermenigvuldigen over optellen en aftrekken [2] is de groei in generalisatie naar meer dan één variabele ook ter sprake gekomen. Voor het begrip is een dergelijke opbouw m.i. vrijwel onontbeerlijk. Deze opbouw geeft tevens aan hoe voorzichtig je het rekenen met meer dan één variabele kunt introduceren.
Een geschikt hulpmiddel om te leren werken met formules in 2 variabelen is natuurlijk ook het maken van 2-dimensionale tabellen. Dergelijke tabellen bieden ook de kans om aan leerlingen het onafhankelijk variëren van beide variabelen te laten zien door één van beide variabelen telkens even vast te houden (door te substitueren) en de andere variabel te houden.
Hier is een voorbeeld:

Tabel voor $(a, b) \to 10 \cdot a + 7 \cdot b + 3 \cdot a \cdot b - 5 \cdot b$

	3	−13	6	25	44	63	82	$19 \cdot a + 6$
	2	−12	4	20	36	52	68	$16 \cdot a + 4$
	1	−11	2	15	28	41	54	$13 \cdot a + 2$
↑	0	−10	0	10	20	30	40	$10 \cdot a$
b	−1	−9	−2	5	12	19	26	$7 \cdot a - 2$
		−1	0	1	2	3	4	a

$a \to$

Het partieel substitueren (en desgewenst dan herleiden), zoals hier in de rechterkolom gedaan is, is voor de leerlingen een handig en natuurlijk hulpmiddel om de tabel in te vullen: eerst vullen ze de rechter kolom in en daarna substitueren ze getallen voor a. Juist het bekijken van die rechterkolom blijkt een prima hulpmiddel voor leerlingen om inzicht in de gegeven formule te krijgen. Het effect kan nog worden versterkt door ook eens telkens a vast te houden door een substitutie en dan slechts b te variëren.
Het invullen van *verscheidene* getallen voor één der variabelen lijkt me het essentiële punt. Ik heb ervaren, dat dit partieel substitueren in tabellen voor veel leerlingen echt verhelderend werkt, maar je moet er dan wel tijd aan besteden en zoiets tamelijk vaak doen.
Misschien zou het wel verstandiger zijn om in de brugklas het aantal variabelen meestal te beperken tot twee. Een ongebreideld strooien van vele variabelen is m.i. in de brugklas zeker niet op zijn plaats en verleidt slechts de leerlingen tot – min of meer op goed geluk – wat goochelen zonder begrip. Merkwaardig is het dat je in allerlei leerboeken voor de eerste en tweede klassen vaak aanzienlijk complexere formules aantreft dan normaal in de hogere klassen nodig zijn.

Evaluatie

Met het toepassen van de ideeën die ik geschetst heb in dit artikel en de twee voorgaande [1, 2] hebben J. Cuypers, enkele andere collega's en ik goede ervaringen. Ik denk dat die ideeën ook bij het lesgeven uit gangbare methodes

grotendeels te gebruiken zijn, maar om ze ten volle te benutten hebben we zelf leerteksten gemaakt en die willen we in de toekomst verder ontwikkelen. Daarin worden we aangemoedigd door het plezier waarmee leerlingen in de brugklassen hebben gewerkt en door onze indruk, dat zij met meer inzicht, zekerheid en zelfstandigheid wiskunde hebben bedreven.
Ik kan niet nalaten u hier te vertellen van een voorval rond de krokus-vakantie in mijn tot nu toe laatste brugklas: Een van mijn leerlingen klaagde, dat de stencils meer werk opleverden dan het schoolboek (ModerneWiskunde, deel 1 en 2: ik heb deze boeken gebruikt ter aanvulling van ons eigen lesmateriaal, met name voor de meetkunde). Deze klacht lokte sterke reacties uit van verscheidene andere leerlingen: zij verdedigden de stencils, omdat deze zo goed te begrijpen waren. Niemand in de klas sprak deze reacties tegen. Zoiets geeft de burger moed!
De door ons toegepaste opbouw is gericht op het leggen van een stevige basis. Wij verwachten dat hierdoor minder problemen in het vervolg ontstaan. Ervaringen op het Jeroen Bosch College (in eerste tot en met vierde klassen) wijzen erop dat die verwachting uitkomt en ook dat deze aanpak, voortgezet in de volgende klassen, de overgang naar wiskunde zoals gepropageerd door hen die de HEWET voorbereiden, soepeler maakt.
Voor het leggen van een stevige basis is geduld nodig; haastig doorstoten naar verkortingen in denkprocessen door bijvoorbeeld vroegtijdig rijen oefensommen op (relatief) hoog niveau op te geven leidt tot fouten, verwarring en rekenen zonder begrip, en daardoor uiteindelijk tot tijdverlies.
Het lijkt me niet verstandig de te bereiken vaardigheden in de brugklas zonder meer af te leiden uit de opgaven van een of ander brugklasboek: soms wordt er meer gevraagd van de leerlingen dan op den duur nodig is en vaak zijn opgaven nodeloos abstract door een teveel aan variabelen. Het is m.i. beter leerlingen rustig te laten groeien in inzicht en vaardigheid.
Natuurlijk is het verwerven van vaardigheden slechts een deel van het wiskunde leren in de brugklas: er blijken veel kansen te zijn om kiemen te leggen voor allerlei wezenlijke zaken van de wiskunde, met name voor:

a het begrip functie en bijbehorende hulpmiddelen: samenstellen (ontleden) en inverse;
b in samenhang hiermee: heuristieken voor het oplossen van vergelijkingen en ongelijkheden;
c het gebruik van wiskunde (toepassingen);
d algemene heuristieken, met name: oplossen van speciale gevallen/systematiseren, (met begrip) generaliseren, toepassen.

Bovendien kan in de brugklas de bodem vruchtbaar gemaakt worden voor deze kiemen door leerlingen niet te laten leren wat er 'mag' en hoe het 'moet', maar hun capaciteiten om te analyseren geduldig te ontwikkelen en een houding te bevorderen van waarheid en zekerheid zoeken op basis van inzicht.

Literatuur

1 B. N. P. Kamerich: *Problemen oplossen in de brugklas* (Euclides 59, 5, p. 245).
2 B. N. P. Kamerich: *Rekenoperaties in de brugklas* (Euclides 59, 9. p. 411).

De Wageningse Methode

P. G. J. VREDENDUIN

1 Inleiding

Ter recensie kreeg ik het materiaal voor de eerste twee leerjaren van deze methode. Naast zeer veel waardering heb ik natuurlijk ook kritiek. Omdat ik hun werk zo belangrijk vind, zou ik graag zien dat de schrijvers deze kritiek willen benutten om hun visie nader naar voren te brengen. Het is niet gebruikelijk op een recensie te reageren. Vandaar dat ik de voorkeur geef aan het schrijven van een beoordeling in artikelvorm.
Het IOWO heeft de stoot gegeven tot een nieuwe conceptie van wiskunde-onderwijs. De invloed daarvan op de Wageningse Methode is duidelijk. De methode is aanvankelijk ontwikkeld door leraren van het Wagenings Lyceum voor intern gebruik. Martin Kindt, die zowel leraar aan dit lyceum als medewerder van het IOWO geweest is, was een belangrijke schakel tussen het IOWO en Wageningen. Van de huidige auteurs, Leon van den Broek, Wim Kremers, Simon Schoone en Anje Stolp, is Wim Kremers enige jaren bij het IOWO werkzaam geweest.

2 Enkele algemene opmerkingen over wiskunde-onderwijs

Wiskunde is ontsproten aan de realiteit. Het nut van wiskunde is dat ze ons in staat stelt deze realiteit beter te beschrijven en te beïnvloeden. Tussen het ontstaan van wiskunde en het bereiken van dit doel ligt een lange weg. Deze weg is in de loop van de geschiedenis zelfs langer geworden. Allereerst de weg van de abstractie, waardoor wiskunde meer en meer weltfremd werd en het deductieve systeem centraal kwam te staan. Met als tegenpool de mathematisering van de realiteit, die het mogelijk maakt het abstracte systeem op deze realiteit toe te passen.
Het traditionele meetkunde-onderwijs hield rekening met de banden die in oorsprong wiskunde en realiteit met elkaar verbinden. Daarna werd overgegaan tot partiële abstractie. Wat het wil zeggen dat een punt tussen twee andere punten ligt, op het verlengde van een zijde, binnen of buiten een driehoek bleef daarbij intuïtief duidelijk. Alles wat met de tussenrelatie in verband staat, mocht uit de figuur worden afgelezen. Overigens was elk beroep op de figuur taboe.
Ook het getalbegrip werd vanuit de realiteit ingevoerd. Eerst later werden de

redeneringen strenger en abstracter.
Toepassing op de realiteit is heel lang het stiefkind in ons onderwijs geweest. Boldriehoeksmeting ten bate van de astronomie, trigonometrie ten bate van de landmeting, samengestelde-intrestrekening, toepassingen van de analyse op de mechanica verschenen en verdwenen in ons onderwijs, meestal als gevolg van een zekere ongeïnteresseerdheid van zowel leraar als leerling. Velen begonnen langzamerhand wel in te zien dat het belangrijk was toepassingen te integreren in het onderwijs, maar wisten er niet goed raad mee.
IOWO en later SLO hebben de mogelijkheid tot veranderingen voorbereid. In het HEWET-A programma zijn deze veranderingen radicaal doorgevoerd. Enerzijds wordt de toepassing op de realiteit zo meer en meer centraal gesteld, anderzijds wordt het streven naar abstractie teruggedrongen. HEWET-A gaat hierin zelfs zeer ver. Ik krijg hier de indruk dat abstractie als een soort ballast wordt beschouwd en dat men alleen nog maar oog heeft voor de praktische waarde van de wiskunde. Ik constateer dit, maar onthoud me van elk oordeel, omdat ik me daartoe noch gerechtigd noch capabel acht.
Wel wil ik nog iets over abstractie zeggen. Men ontkomt er niet aan. Reële getallen in de algebra, punt, rechte lijn en plat vlak in de meetkunde zijn abstracties. Ze komen in de realiteit niet voor. Toch zijn ze onmisbaar voor het beschrijven van de realiteit. Op deze paradox ga ik niet nader in; ze is de moeite van het overdenken wel waard.
Tot slot hoop ik dat de lezer mij vergeven wil dat ik een persoonlijke overtuiging aangaande het nut van wiskunde-onderwijs toevoeg. Voor ieder is belangrijk dat hij zich traint in correct denken. Men moet in staat zijn zich scherp en ondubbelzinnig uit te drukken en op verantwoorde wijze een conclusie te trekken. Het vak dat zich bij uitnemendheid ertoe leent zich hierin te oefenen is de wiskunde. Het geven van een nauwkeurige begripsomschrijving en het trekken van eenvoudige conclusies uitgaande van dergelijke omschrijvingen is in dit verband nuttig. Terugdringen van de abstractie hoeft niet gepaard te gaan met het verslappen van de aandacht voor correct zich formuleren en op verantwoorde wijze conclusies trekken. Ik zou het betreuren als men dit langetermijndoel uit het oog ging verliezen.
Na dit intermezzo keer ik terug naar mijn eigenlijke onderwerp, de Wageningse Methode.

3 De structuur

De uitgave bestaat voor de eerste klas uit 13 deeltjes en voor de tweede klas uit 12. Hierbij is ervan uitgegaan dat men in de tweede klas de beschikking heeft over vier wekelijkse lesuren. Is dit aantal minder, dan zullen enkele deeltjes verschoven moeten worden naar klas 3.
Elk deeltje bestaat uit een hoofddeel, dat gemiddeld 30 bladzijden groot is, gevolgd door extra werk voor wie dat nodig blijkt te hebben en 'extra sterk' voor degenen die toekomen aan moeilijker vraagstukken of aan uitbreiding van de stof. Verder wordt een zelftoets verstrekt.
Bij elk deeltje hoort een uitvoerig antwoordenboekje. En voor elk leerjaar een

docentenhandleiding. Deze docentenhandleiding bevat onder meer twee concept-proefwerken bij elk deeltje. De deeltjes zijn werkboeken. De antwoorden worden in het boek geschreven en eveneens de nodige berekeningen. Elk deeltje is een afgerond geheel. Hieronder een overzicht van de leergang. In het overzicht hierna zijn de meetkundeboekjes (m) en de IOWO-materialen als zodanig aangegeven.

1e jaar (bij 4 uur per week)

1 Kennismaken met wiskunde
2 Telproblemen
3 Ruimtelijke vormen (m)
4a Formules
4b Rekenwetten
5 Roosterdam
6 Regelmatige figuren (iowo, m)
7 Breuken
8 Gehele getallen
9 Hoeken (m)
10 Rationale getallen
11 Afstanden (m)
12 Machten
13 Getallen en grafieken

2e jaar (bij 4 uur per week)

14 Machientjes en grafieken
15 Symmetrie (m)
16 Vergelijkingen 1
17 Gelijkvormigheid (m)
18 Tussen twee haakjes
19 Pythagoras (m)
20 Merkwaardige produkten
21 Vergelijkingen 2
22 Coördinaten
23 Oppervlakte (m)
24 Ongelijkheden
25 Vectoren

3e jaar (bij 3 uur per week)

26 Relaties
27 Goniometrie
28 Rechte lijnen
29 Wortels
30 Formules en figuren
31 Gebieden
32 Vergelijkingen 3
33 Funkties 1

4e jaar (vwo, 3 uur per week)

34 Exponentiële funkties
35 Funkties 2
36 Inhouden en rechte lijnen in de ruimte (m)
37 Logaritmen
38 Periodieke funkties
39 Differentiëren 1 (iowo, t/m F)
40 Kansrekening 1
41 Differentiëren 2 (iowo, G en H)
42 Kansrekening 2

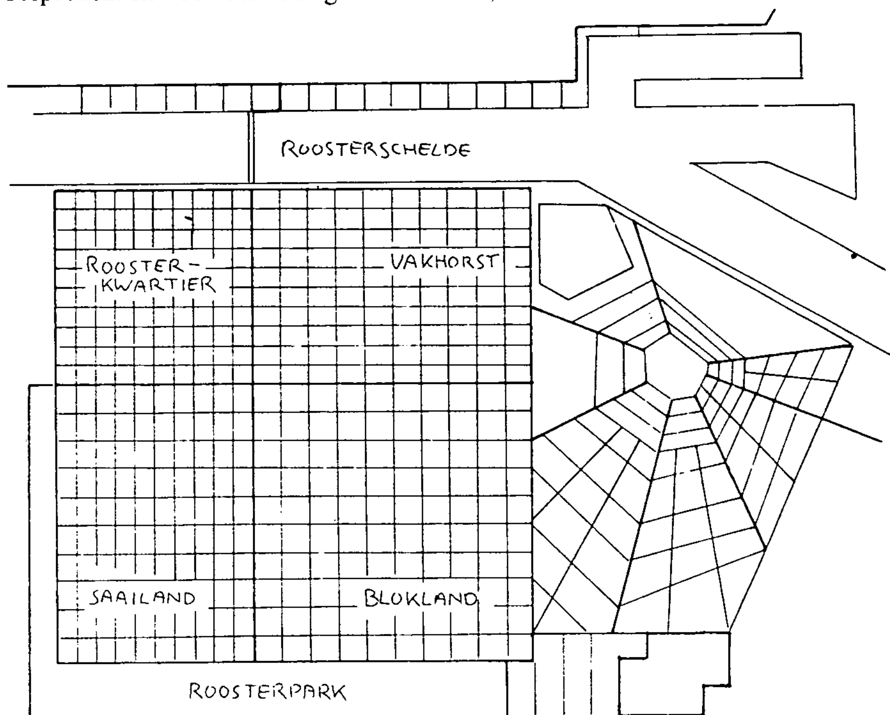
4 De gezichtspunten

De wiskundige begrippen worden ontwikkeld vanuit de realiteit. Daar blijft het niet bij. De afleiding van algebraïsche formules en van meetkundige eigenschappen geschiedt eveneens aan de hand van praktijkvoorbeelden. Wie aanvaardt dat een bewijs een redenering is, die overtuigend is op het niveau van de leerling, kan rustig zeggen dat deze formules en eigenschappen langs deze weg bewezen

worden. Het ontwikkelen van wiskunde uit de realiteit gaat vrijwel geruisloos over in het toepassen van wiskunde op de realiteit. De omweg via de abstractie is daarmee vermeden.
Met de traditionele tweedeling theorie-vraagstukken is volledig gebroken. De leerling wordt voor problemen gezet die hij zelf oplost aan de hand van een serie doelmatig gekozen vragen. Zo leidt hij zelf de theorie af. Hoogstens vindt men tot slot een enkel regeltje waarin wordt samengevat wat de leerling zelf reeds gevonden heeft.
De bekende series vraagstukken waarin technieken getraind worden, vindt men nauwelijks. Een techniek wordt ingeoefend door hem in allerlei situaties te laten uitvoeren. Gevolg is dat de leerling bij elke toepassing met begrip te werk moet gaan. Hij leert begrijpen wat hij doet. Door het inzicht te verstevigen, is routinematig werken minder noodzakelijk geworden. Geheel achterwege gelaten zijn de rijtjes vraagstukken niet, maar ze zijn tot een aanvaardbaar minimum gereduceerd. Zonder twijfel werken de leerlingen zo met meer plezier aan wiskunde dan bij het volgen van de traditionele methode.
De schrijvers hebben een gezonde afkeer van verbalismen. Als langs visuele weg of door een enkele hint hun bedoeling duidelijk genoeg overkomt, sloven ze zich niet uit om nogmaals in woorden hun bedoeling exact te formuleren.

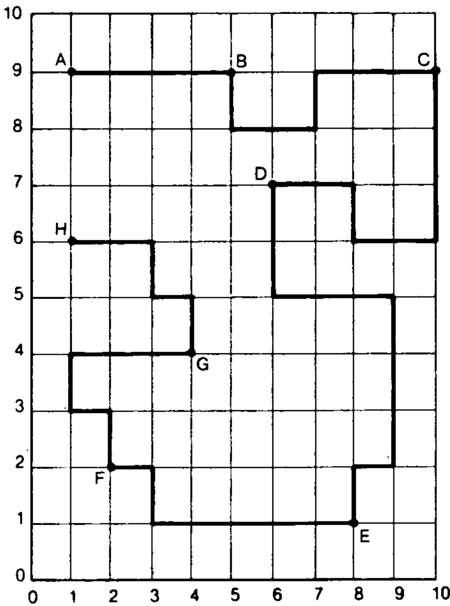
5 De methode – algebra

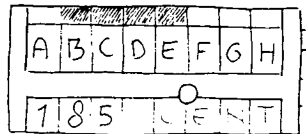
Om enig inzicht te krijgen in de gevolgde werkwijze, wil ik één deeltje uitvoerig bespreken. Ik heb daarvoor gekozen deel 5, roosterdam.

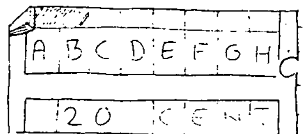


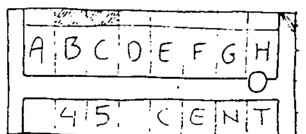
Voorkennis. Deze is in hoofdzaak verkregen in de deeltjes 4a, formules, en 4b, rekenwetten. In 4a zijn eenvoudige probleempjes gesteld, zoals het aantal wedstrijden dat in totaal gespeeld wordt in een halve competitie. Noem dit aantal c. Zijn er 6 clubs, dan vinden we $c = 15$, bij 18 clubs $c = 153$, en tenslotte bij a clubs $c = \frac{1}{2}a(a - 1)$. In 4b wordt het gebruik van haakjes toegelicht. Daarna worden de commutatieve, associatieve en distributieve eigenschap van de vermenigvuldiging met behulp van praktijkvoorbeelden afgeleid en komen ook de commutatieve en associatieve eigenschap van de optelling ter sprake.
Nu Roosterdam. De plattegrond van deze stad ziet er als volgt uit.

Begonnen wordt met enkele oefeningen in het bepalen van oppervlakten door middel van hokjes tellen. Dit omdat we het straks nodig hebben.
In Saailand loopt een bus. De route is in de linkerfiguur hieronder weergegeven.

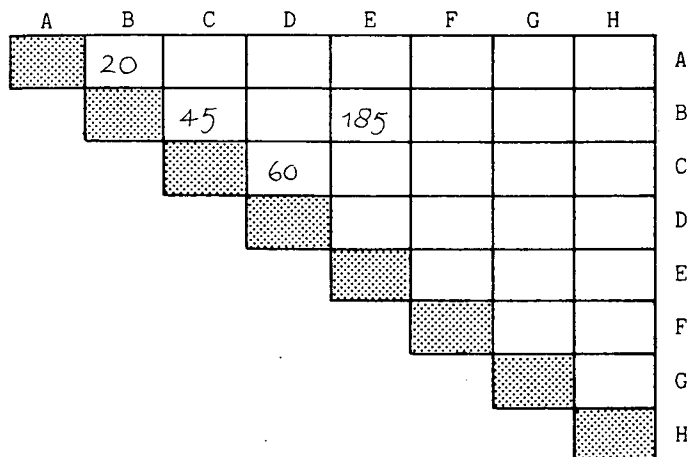






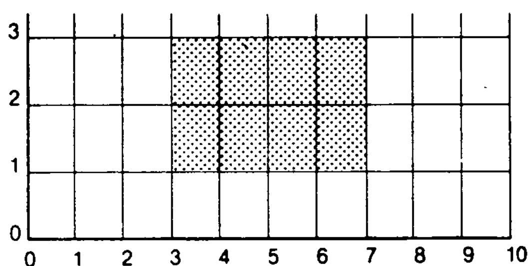


De afmetingen van de hokjes zijn horizontaal a (meter) en verticaal b (meter). Bereken nu de lengte van de route AB, van BC en daarna van AC. Nu CD, DE en CE; EF, FG, GH en EH. En ten slotte natuurlijk AH. Zo leren we tweetermen optellen.
De prijs van een kaartje hangt alleen af van de aantallen keren a en b dat het traject lang is. De prijs voor het traject EB is 185 cent, voor AB 20 cent en voor BC 45 cent (zie de figuren rechtsboven). Uit de laatste twee gegevens kunnen we de prijs voor elk traject afleiden. Controleer of de prijs over EB klopt. Vul de volgende prijzentabel in.



Nu worden in Saailand coördinaten ingevoerd. Hoeveel kortste routes zijn er van (4, 2) naar (6, 4), van (6, 4) naar (9, 5) en van (4, 2) via (6, 4) naar (9, 5)?

Hieronder is een rechthoekig gebied in Saailand getekend.



De oppervlakte berekenen we op twee manieren:

de lengte is $4a$
de breedte is $2b$
dus
de oppervlakte is $4a \cdot 2b$

de rechthoek bestaat uit 8 blokjes
elk met oppervlakte ab
dus
de oppervlakte is $8 \cdot ab$

Waaruit we zien dat $4a \cdot 2b = 8 \cdot ab$

Nu dit zelf in een paar analoge voorbeelden toepassen en dan het volgende 'ouderwetse' rijtje sommen.

Vul in:

$4a \cdot 5b = \dots$	$8a \cdot 3b = \dots$	$a \cdot 7b = \dots$
$10a \cdot 8b = \dots$	$13a \cdot b = \dots$	$5a \cdot 18b = \dots$
$..a \cdot 5b = 20 \cdot ab$	$2a \cdot ..b = 6 \cdot ab$	$..a \cdot 4b = 12 \cdot ab$

Merk op dat deze opgaven met zorg zo gekozen zijn, dat machinaal werken voorkomen wordt.

Oppervlakteberekeningen in Roosterkwartier leiden ertoe, dat men het onderscheid leert begrijpen tussen $4 \cdot a^2$ en $(4a)^2$. Dan om te toetsen of men het begrepen heeft, de volgende opgave.

Streep de foute formules door.

$4 \cdot a^2 = 4 \cdot a \cdot a$ $\quad 4 \cdot a^2 = 4a \cdot 4a$ $\quad (4a)^2 = 4a \cdot 4a$

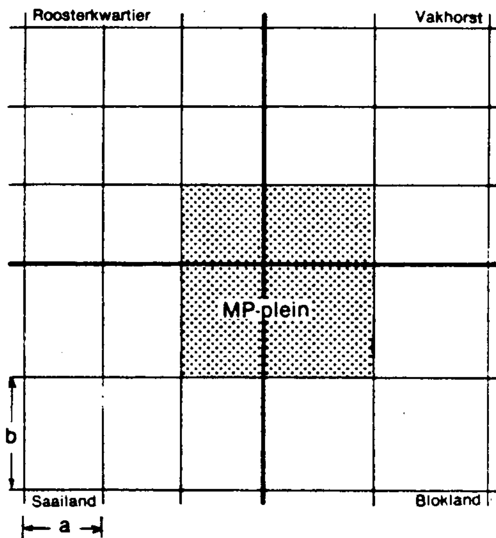
$4 \cdot a^2 = (4a)^2$ $\quad 4 \cdot a^2 = 16 \cdot a^2$ $\quad (4a)^2 = 16 \cdot a^2$

Tot slot levert optellen van de oppervlakten van twee rechthoeken die een zijde $3a$ gemeen hebben, dat

$$6 \cdot a^2 + 12 \cdot a^2 = 18 \cdot a^2.$$

De verkregen kennis wordt afgesloten met een serie van twaalf gemengde rekenopgaven. Wie zich niet safe voelt, mag ter ondersteuning rechthoekjes erbij tekenen.

Rondom het 'vierwijkenpunt' ligt een plein dat bestaat uit één hokje van elk van de vier wijken.



De oppervlakte ervan rekenen we weer op twee manieren uit.

lengte × breedte = $(a + b) \cdot (a + b) = (a + b)^2$

de oppervlakte van de vier hokjes afzonderlijk is a^2, ab, ab en b^2

Hiermee is afgeleid het merkwaardige produkt

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

De formule wordt gebruikt voor het uitrekenen van kwadraten van getallen, bijv. van 75 en 101.

Rondom het 'vierwijkenpunt' wordt een winkelcentrum gebouwd. De afmetingen worden $3a + 3b$ en $2a + b$. Weer wordt op twee manieren de oppervlakte uitgerekend. Zo komen we tot de formule:

$$(2a + b) \cdot (3a + 3b) = 6 \cdot a^2 + 9 \cdot ab + 3 \cdot b^2$$

Ook deze formule wordt ingeoefend. Als bijzonder geval komt daarbij te voorschijn

$$2a \cdot (3a + 4b) = \ldots.$$

Ten slotte draaien we de zaak om en komen tot enkele (meetkundig ondersteunde) ontbindingen, zoals:

$2 \cdot a^2 + 6 \cdot ab = \ldots\ldots \cdot (\ldots\ldots + \ldots\ldots)$

$a^2 + 5 \cdot ab + 6 \cdot b^2 = (\ldots\ldots + \ldots\ldots) \cdot (\ldots\ldots + \ldots\ldots)$

Dit is in grote lijn de inhoud van het boekje. Van de details vermeld ik nog de volgende leuke opgave. In Roosterkwartier staan telefooncellen in (3, 7) en (7, 5). Plaats meer telefooncellen zo dat geen enkele bewoner meer dan $4a$ hoeft af te leggen om een cel te bereiken. (De woonplaatsen van de bewoners worden met de roosterpunten geïdentificeerd. Wij snappen dat niet zo direct, maar de leerlingen wel. Vandaar dat het niet expliciet vermeld wordt.)

Kritiek. Deze heeft alleen zin als het om principiële zaken gaat.
In deel 24, ongelijkheden, wordt gevraagd op te lossen $x^2 + 4x < 0$. Dit gebeurt als volgt:

Los de gelijkheid op:
$x^2 + 4x = 0$

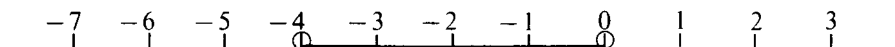
$x(x + 4) = 0$

Vul in:

x	-7	-5	-4	-2	-1	0	1	2
$x^2 + 4x$	21							

Teken nu het plaatje bij $x^2 + 4 < 0$: ....

De bedoeling is dat getekend wordt het plaatje:



Hier wordt zo geredeneerd: $x^2 + 4x$ is positief als $x = -5$, en ook als $x = -7$. Dan zal $x^2 + 4x$ wel overal links van -4 positief zijn. Op analoge gronden blijkt $x^2 + 4x$ negatief te zijn tussen -4 en 0, en positief rechts van 0.
Een dergelijke heuristische redenering van de vorm: 'het gaat twee keer goed; dan zal het wel altijd goed gaan vind ik uit den boze. Eén van de dingen die we leerlingen in de wiskundeles willen bijbrengen, is toch wel dat dit niet mag. Dit is een onbetrouwbare conclusievorm.
Om misverstand te voorkomen vergelijk ik de redenering nog even met de hierboven afgeleide formule

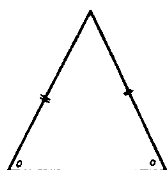
$$(2a + b)(3a + 3b) = 6a^2 + 9ab + 3b^2$$

Hoewel deze formule afgeleid wordt voor één rechthoek, ziet men direct dat ze geldig blijft als men de coëfficiënten 2, 1, 3 en 3 door andere (positieve gehele) vervangt. De coëfficiënten hebben hier de functie van variabelen. Zouden ze door variabelen vervangen worden, dan werd de redenering voor de leerling te onoverzichtelijk en zou daardoor voor hem aan bewijskracht inboeten.
Bij de ongelijkheid is er echter geen sprake van dat uit het positief zijn bij -5 en -7 te zien is, dat analoog bij bijv. -10 het linker lid positief is.

6 De meetkunde

Een wens van velen is de ruimtemeetkunde parallel met de planimetrie te ontwikkelen. Nu in HEWET-B de ruimtemeetkunde weer een plaats krijgt in de bovenbouw, ligt het voor de hand in de onderbouw voorbereidend werk te doen. Deel 3, ruimtelijke vormen, is geheel aan ruimtemeetkunde gewijd. We maken

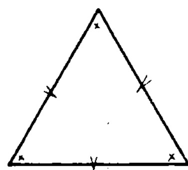
kennis met een veelheid van ruimtelijke vormen, zoals prisma, piramide, kegel, cilinder, bol, kubus, afgeknotte piramide en kegel. In deel 6, regelmatige figuren, wordt de kennismaking voortgezet. De vijf regelmatige veelvlakken passeren de revue. Veel aandacht wordt besteed aan de kubus, aan uitslag en aan doorsneden. Wie er niet in slaagt de vragen te beantwoorden, kan trachten met behulp van draadmodellen of bouwplaten enig ruimte-inzicht aan te kweken. In 9, hoeken, komen ook hoeken tussen lijnen in ruimtelijke figuren aan de orde. In 15, symmetrie, komt spiegelsymmetrie en rotatiesymmetrie van ruimtelijke figuren ter sprake. In 17, gelijkvormigheid, worden ook ruimtefiguren vermenigvuldigd en wordt onderzocht wat er dan met hun inhoud gebeurt. In 19, de stelling van Pythagoras, worden berekeningen in kubus en balk uitgevoerd. In 22, coördinaten, worden zowel coördinaten in het vlak als in de ruimte besproken. En ook op enkele andere plaatsen komt de ruimte aan de orde.
Nu de planimetrie. Zoals te verwachten was, wordt ook de planimetrie in nauw contact met de realiteit ontwikkeld. Dat heeft weer aantrekkelijke kanten. Bijzonder aardig vond ik de introductie van het begrip afstand door te beginnen met het probleem: hoe zullen we de zeebodem verdelen over de verschillende landen? Elk land krijgt dat deel van de zeebodem toegewezen dat het dichtst bij zijn kust ligt.
Helaas heb ik toch tegen de opbouw van de planimetrie ernstige bezwaren. Mijn grondbezwaar is: de planimetrische begrippen worden niet scherp omlijnd; afleiden van eigenschappen van planimetrische figuren blijft achterwege. Ik zal trachten dit bezwaar te adstrueren.
Hoeken lenen zich er uiteraard uitstekend toe uitgaande van de werkelijkheid besproken te worden. Maar het hoekbegrip kan op drie manieren vastgelegd worden: als paar halve rechten, als deel van een vlak en als rotatie. De schrijvers doen geen keus. Integendeel, bij hen is een hoek dan weer een paar halve rechten, dan weer een vlakdeel en dan weer een rotatie. De inspringende hoek (d.i. de hoek groter dan 180°) doet als vlakdeel weer zijn intrede, hetgeen ik jammer vind. Ik vat hieronder samen de informatie die de leerlingen krijgen aangaande soorten driehoeken en vierhoeken.



gelijkbenige driehoeken

twee zijden even lang; twee hoeken even groot

deel 1



gelijkzijdige of regelmatige driehoeken

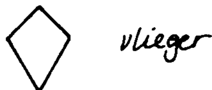
drie zijden even lang; drie hoeken even groot

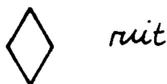
deel 9



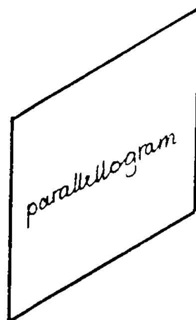












deel 5



In deel 6, regelmatige figuren, wordt met 3 lucifers een regelmatige driehoek gelegd. Met 12 lucifers wordt een rad met 6 spaken gelegd. De 6 spaken worden weggenomen en zo ontstaat een regelmatige zeshoek. De regelmatige twaalfhoek krijg je vervolgens door de 'uren' op een wijzerplaat met elkaar te verbinden. Gevraagd wordt nog: hoe denk je dat een regelmatige vierhoek er uit ziet? En dan word je geacht in staat te zijn aan een veelhoek te zien of hij regelmatig is of niet. Met deze informatie moeten we het doen. Ik heb nergens gevonden dat een rechthoek ook een parallellogram is en dat een vierkant een ruit en een ruit een vlieger is. De gevolgen van de vage begripsbepalingen blijven niet uit. In deel 15, symmetrie, worden symmetrie-eigenschappen van bovenstaande figuren opgespoord. Hoeveel symmetrieassen hebben ze? Zijn ze draaisymmetrisch en zo ja, van welke orde is deze symmetrie? Waar begripsomschrijvingen ontbreken, is elke redenering hier onmogelijk. Men ziet welke symmetrie-eigenschappen de figuren hebben.

De planimetrische methode is gereduceerd tot: wat men ziet, is waar. Ik vind dit een ernstige tekortkoming van de methode. Temeer omdat een betere opbouw van de planimetrie met duidelijke begripsbepalingen en met, zij het slechts eenvoudige, lokale deductie (bijv. het definiëren van figuren met behulp van symmetrie-eigenschappen en het afleiden van verdere eigenschappen uit deze symmetrie) m.i. verenigbaar zou zijn met de inzichten van de schrijvers.

Het spijt me dat ik op een methode waarvoor ik zoveel waardering heb, hier op een essentieel punt vrij scherpe kritiek moet hebben. Laten leraren die het met mij eens zijn, zich er echter niet door laten afschrikken. Mijn kritiek is in wezen alleen gericht op deel 15. Men kan dit deel zelf herstructureren. Men moet dit deeltje

dan gebruiken om de aanvankelijk intuïtief ingevoerde planimetrische begrippen te preciseren. Men heeft dan tevens de mogelijkheid eigenschappen ervan af te leiden en deze niet uit de figuur af te lezen.

7 Slot

De Wageningse Methode heeft reeds een tienjarige geschiedenis achter de rug. Mijn eerste kennismaking ermee was in het prille begin. Als docent didactiek kreeg ik de gelegenheid een les bij te wonen van een hospitant in een brugklas waar ermee gewerkt werd. Het was een algebrales. Ik was enthousiast over wat ik daar gadesloeg. Enige jaren later kreeg ik de volledige methode, in nog onvoldragen vorm, ter beoordeling. En nu heb ik kennisgemaakt met het eindprodukt. Mijn waardering is alleen maar gaandeweg groter geworden.
De methode is geschreven voor havo-vwo. Dit heeft, naast onmiskenbare voordelen als nadelig effect dat het debiet er aanmerkelijk door beperkt wordt. De methode sluit uitstekend aan bij HEWET-A en is ook voor HEWET-B een goed bruikbare voorbereiding.
Ik heb het grootste respect voor de diverse schrijvers die aan de methode werken of gewerkt hebben. Ze hebben zich laten leiden door idealistische motieven en niet door financiële. De voortreffelijke lay-out is door henzelf uitgevoerd, ze verrichten het tikwerk zelf en Ad van den Broek (broer van Leon) verzorgt de illustraties. De uitgever hoeft alleen maar voor de reproduktie te zorgen. Hadden de auteurs niet zelf zoveel werk verzet, dan waren de boekjes onbetaalbaar geworden. Thans kosten ze ongeveer *f* 25,– per leerjaar. Uitgever is Meijer en Siegers bv te Oosterbeek.

NASCHRIFT

Met genoegen hebben wij het artikel van P. G. J. Vredenduin over onze methode gelezen. Wij voelen ons in dat stuk erg gekend. Het is hem gelukt uit de 25 deeltjes die nu gedrukt zijn, onze visie op het wiskunde-onderwijs en onze didactische inzichten daarbij te destilleren. Zijn en onze opvattingen lopen niet ver uiteen.
Wij willen graag ingaan op zijn twee hoofdpunten van kritiek. Een uitgangspunt voor de Wageningse Methode is de zelfwerkzaamheid: de leerlingen moeten nagenoeg zelfstandig de boekjes door kunnen werken. Daar zijn ze op geschreven en meermalen herschreven. Als een zekere tekst in de klas niet 'liep', werd hij vervangen. Dit is ook het geval geweest met de twee onderwerpen waarop Vredenduin zijn kritiek richt: het oplossen van ongelijkheden en het precies definiëren van een aantal meetkundige begrippen de deduceren van eigenschappen daaruit.

Het oplossen van ongelijkheden

De ongelijkheid $(x + 3)(x - 4) > 0$ met $x \in \mathbb{R}$ laat zich als volgt oplossen. De factoren $x + 3$ en $x - 4$ moeten beide positief of beide negatief zijn.
We maken een tekenschema:

x :		-3		4	
$x + 3$:	– – – – – –	0	+ + + + +	+	+ + + + + +
$x - 4$:	– – – – – –	–	– – – – –	0	+ + + + +
$(x + 3)(x - 4)$:	+ + + + +	0	– – – – –	0	+ + + + +

Dus: $x < -3 \lor x > 4$

Tot in de voorlaatste versie hebben we geprobeerd leerlingen op deze manier ongelijkheden te laten oplossen. Dat is ons niet gelukt: uitvoerige klassikale toelichting van de docent bleef noodzakelijk. Toch vinden wij het belangrijk dat leerlingen in de tweede klas al kennis maken met het oplossen van ongelijkheden, zowel met als zonder grafiek.We hebben toen nog op één school de aanpak geprobeerd die ook in de definitieve versie staat: 'probeer min of meer systematisch getallen voor x'.

x		-3		4	
$(x + 3)(x - 4)$					

Deze aanpak liep wel. Natuurlijk hebben we het bezwaar dat Vredenduin hiertegen aanvoert, onderkend. Maar deze oplossingsmethode gaat altijd goed en is wiskundig correct, tenminste als er niets bijzonders aan de hand is. En als er wel iets bijzonders aan de hand is, kun je dat van tevoren zien. Zo'n bijzonderheid doet zich voor bij gebroken lineaire ongelijkheden: de noemer mag niet nul zijn. Dit geval komt in het boekje ongelijkheden dan ook uitvoerig aan de orde: ongelijkheden als $\frac{x+1}{x-3} \geqslant 0$ worden opgelost. Andere bijzonderheden zullen de leerlingen later, nadat ze hebben leren differentiëren, tegenkomen. Op dat moment komen wij dan ook op dit onderwerp terug.

De meetkunde

Vredenduin merkt terecht op dat wij planimetrische figuren niet exact beschrijven, maar volstaan met 'voorbeeldige' plaatjes. Inderdaad is nergens expliciet vermeld dat een rechthoek ook een parallellogram is. Zodra dergelijke zaken vragen in de klas oproepen, zal de docent deze gemakkelijk kunnen beantwoorden.

Bij het ontbreken van scherpe definities, is deductie van afgeleide eigenschappen van figuren onmogelijk. In vorige versies van de Wageningse Methode hebben we wel geprobeerd de leerlingen zulke bewijsvoeringen te laten maken. Dit werk bleek echter een te hoog abstractie-niveau te hebben: in feite moest de docent alle afleidingen zelf geven.

Overigens kan ieder zich ervan overtuigen dat wij niet afkerig zijn van 'beredeneeropdrachten', ook niet binnen de meetkunde.

Wiskundig-precieze omschrijvingen en afleidingen zijn niet altijd in overeenstemming met het karakter van de werkboekjes. Ook klassikale behandeling van meetkunde op dit niveau helpt weinig: bij veel leerlingen in de onderbouw kom je niet boven het niveau van het laten herhalen van niet echt begrepen woorden. Wij zijn ervan overtuigd dat lessen op een lager, concreter niveau plezieriger en uiteindelijk zinvoller zijn.

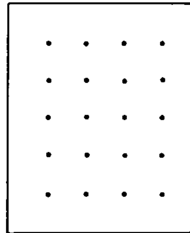
De schrijvers

Recreatie

Nieuwe opgaven met oplossingen en correspondentie over deze rubriek aan Dr. P. G. J. Vredenduin, Dillenburg 148, 6865 HN Doorwerth.

Opgaven

514. Een biljart heeft afmetingen a en b ($a, b \in \mathbb{Z}^+$). Op het laken heeft men stippen aangebracht op onderlinge afstand 1 en op minimale afstand 1 van de rand, zoals in de figuur is aangegeven. Men legt de bal op een van de stippen. Is het mogelijk de bal zo weg te stoten dat hij alle stippen passeert?



515. Degene die multiple-choice opgaven moet maken, weet tot zijn vreugde dat precies één van de vier antwoorden het juiste is. Dit kan leiden tot aanzienlijke verhoging van zijn IQ. Hij kan daardoor soms blijk geven van schier helderziende gaven en oplossingen vinden die een normaal mens niet zou weten te produceren.

Hieronder enkele opgaven die met helderziende blik gemakkelijk opgelost kunnen worden.

1 Welke van de volgende beweringen is *niet* juist?
- A $a = 3$
- B $b = 4$
- C $c = 5$
- D Deze beweringen zijn alle drie niet juist.

2 Welke van de volgende beweringen is *niet* juist?
- A $a = 3$
- B $a = 4$
- C $a = 5$
- D Deze beweringen zijn alle drie niet juist.

3 Welke van de volgende beweringen is juist?
- A $a = 3 \vee a = 4$
- B $a = 3 \wedge a = 4$
- C $a = 3 \vee a \neq 4$
- D $a \neq 3 \wedge a = 4$

4 Welke van de volgende beweringen is juist?
- A $p \to \neg q$
- B $\neg p \to q$
- C $q \vee r$
- D $q \to \neg p$

5 Welke van de volgende beweringen is juist?
- A $p \to q$
- B $q \to r$
- C $r \to s$
- D $\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r$

6 Welke van de volgende beweringen is *niet* juist?
- A $a = b$
- B A is juist.
- C A en B zijn juist.
- D A, B en C zijn juist.

7 Welke van de volgende beweringen is juist?
A C en D zijn juist.
B A, B, C en D zijn onjuist.
C B of C of D is juist.
D Mijn oom is dood.

Oplossingen

512. n lijnen snijden elkaar twee aan twee; geen drie gaan door één punt. Ze verdelen het vlak in een aantal delen.
a Hoeveel van deze delen zijn veelhoeken?
b Minimaal hoeveel daarvan zijn driehoeken?
a De lijnen verdelen het vlak in
$1 + 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{1}{2}n(n + 1) + 1$ delen
Een aantal hiervan zijn veelhoeken. Beschrijf een cirkel waar al deze veelhoeken binnen liggen. Deze cirkel snijdt elk van de lijnen in 2 punten. Hij gaat door alle niet-eindige delen waarin de n lijnen het vlak verdelen. Telkens als de cirkel een lijn passeert, komt hij in een ander vlakdeel. Het aantal niet-eindige vlakdelen is dus $2n$.
Het aantal veelhoeken is dan
$\frac{1}{2}n(n + 1) + 1 - 2n = \frac{1}{2}n(n - 3) + 1$
b Voor $n = 4$ is het aantal driehoeken 2. In figuur 1 ziet men, hoe men achtereenvolgens een lijn l_5, l_6, l_7, ... kan toevoegen zo, dat het aantal driehoeken telkens met precies 1 vermeerderd wordt.

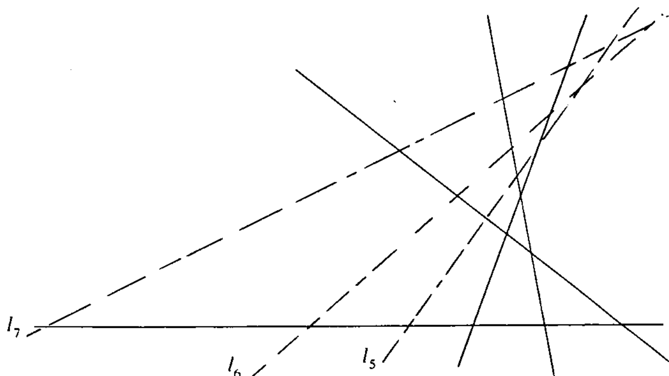


Fig. 1

Anderzijds kunnen we bewijzen: als er reeds n lijnen ($n \geqslant 3$) getrokken zijn en we voegen een $n + 1^e$ lijn toe, dan wordt hierdoor het aantal driehoeken met ten minste 1 vermeerderd.
In figuur 2 is l de $n + 1^e$ lijn. Kies twee reeds getrokken lijnen, l_1 en l_2. Deze sluiten met l een driehoek ABC in. Dit is een nieuwe driehoek, tenzij
er een reeds getrokken lijn l_3 is die driehoek ABC verdeelt (figuur 2a, 2b) of
er een reeds getrokken lijn l_3 is die met l_1 en l_2 een driehoek insluit waarvan driehoek ABC een deel is (figuur 2c).

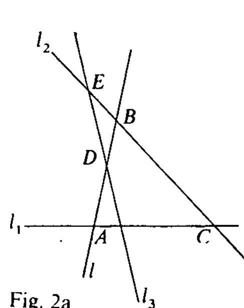


Fig. 2a

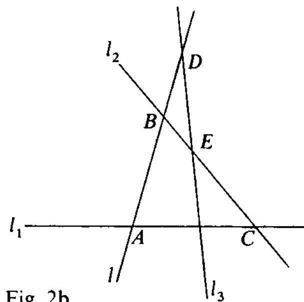


Fig. 2b

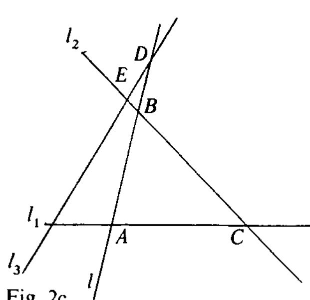
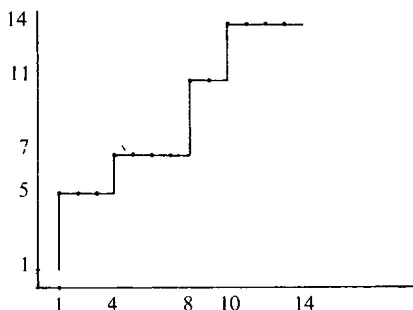


Fig. 2c

In alle gevallen ontstaat daardoor een driehoek BDE waarvan twee hoekpunten op l liggen. Dit is een nieuwe driehoek, tenzij . . .
Zo kunnen we doorgaan, totdat l_n toegevoegd is. Dan is er geen 'tenzij' meer, omdat er geen lijn meer over is. Zodat driehoek BDE dan alleen maar een nieuwe driehoek kan zijn.
Hiermee is bewezen:
voor $n = 4$ is het aantal driehoeken minimaal 2
voor $n = 5$ is het minimaal $2 + 1 = 3$
. . .
In het algemeen is het aantal driehoeken dus minimaal $n - 2$.

513. De rij
1 3 3 5 6 7 7 9 9 10
is een wonderrij, d.w.z. t_i is voor elke $i \leqslant 10$ het aantal getallen uit de rij dat $\geqslant 10 - i + 1$ is. Hoeveel wonderrijen met 14 termen bestaan er?
Als voorbeeld van een wonderrij met 14 termen kies ik
5 5 5 7 7 7 7 11 11 14 14 14 14 14
Hiervan maken we een grafiek.



De manier waarop de getrokken lijn tot stand komt is duidelijk.
Begin in (1, 1), ga omhoog naar het eerste punt van de grafiek, i.c. (1, 5): dan naar rechts tot 1 voorbij het laatste punt met ordinaat 5, dus tot (4, 5), enz.
Omdat de eerste term 5 is, zijn er 5 termen 14. Er zijn drie termen 5. Links van 14 komt daarom $14 - 3 = 11$. Enz.
Men ziet hieruit dat de grafiek symmetrisch is t.o.v. de lijn $x + y = 15$.
De grafiek loopt dus trapsgewijs van (1, 1) naar één van de punten (1, 14), (2, 13), (3, 12), . . ., (14, 1) en daarna symmetrisch verder naar (14, 14).
Bij wijze van voorbeeld rekenen we het aantal getrapte wegen uit van (1, 1) naar (8, 7). De getekende grafiek is er één van.
Deze stellen we voor door
| | | | – – – | | – – – –
(4 omhoog, 3 naar rechts, 2 omhoog, 4 naar rechts).
Elke weg van (1, 1) naar (8, 7) kunnen we dus representeren door een serie van 13 streepjes waarvan er 6 verticaal zijn. Er zijn dus $\binom{13}{6}$ wegen van (1, 1) naar (8, 7).
Het totaal aantal mogelijke getrapte wegen is dan
$\binom{13}{13} + \binom{13}{12} + \binom{13}{11} + \ldots + \binom{13}{0} = 2^{13}$
We zien nu meteen hoe we in het algemeen wonderrijen kunnen construeren.

Boekbesprekingen

P. Kall, *Analysis für Okonomen*, B. G. Teubner, Stuttgart, 1982, 180 blz., DM 28,80.

Dit boek is een inleiding in de analyse voor economiestudenten. Bestaat over de noodzaak van een dergelijke inleiding algemene overeenstemming, over de inhoud, diepgang en presentatie van de stof lopen de meningen sterk uiteen, zoals men na het lezen van een aantal, voor de economische propadeuse bedoelde, analyse boeken gemakkelijk vaststelt. Wat de inhoud betreft vindt men nog wel een doorsnede van minimumeisen zoals differentiaal- en integraalrekening, functies van meer variabelen etc. Met betrekking tot diepgang en presentatie bestaan er echter fundamentele verschillen in de beoordeling van de vraag, of de behandelde wiskundestellingen – en daarbij behoren hier ook zeker de rekenregels van de differentiaal- en integraalrekening – met in de wiskunde gebruikelijke strengheid bewezen moeten worden, of dat voor aankomende economen een paar beschouwingen voldoende zijn om e.e.a. plausibel te maken en of het toereikend is de rekenregels te oefenen aan de hand van aan hun vakgebied ontleende voorbeelden.
Prof. P. Kall wil niets weten van deze tweede variant, die naar zijn oordeel fataal dreigt te worden als de zo opgeleide econoom zelf wiskundige modellen voor economische problemen moet beoordelen of opstellen. In dit verband ontleen ik aan het voorwoord het volgende citaat: 'Die Literatur enthält viele beredte Beispiele für diese Situation, die sich am ehesten vergleichen lässt damit, dass man einen jungen Mann, dem man das Lenken, Bremsen und Gasgeben beigebracht hat, mit einem leistungsstarken Sportwagen in das öffentliche Strassennetz entlässt – in völliger Ungewissheit über die geltenden Verkehrsregeln!'
In het onderhavige boek worden alle stellingen daarom grondig bewezen. De nadruk ligt hier meer op de langzaam en zorgvuldig opgebouwde theorie dan op de toepassing ervan. Op deze wijze worden de diverse stellingen en de mogelijkheden en grenzen van hun toepassing de lezer duidelijk. In zes hoofdstukken bespreekt de schrijver achtereenvolgens: getallen en verzamelingen, convergentie van rijen en reeksen, functies van één variabele, differentiaalrekening, functies van meer variabelen, integraalrekening. De behandeling van deze onderwerpen is overal in overeenstemming met het boven geschetste standpunt van de auteur. Ter illustratie: in hoofdstuk 1 – getallen en verzamelingen – neemt hij de reële getallen niet voor lief maar staat er uitvoerig bij stil, de irrationaliteit van $\sqrt{2}$, de aftelbaarheid van Q, machtigheidsbeschouwingen, infimum, supremum en zelf Dedekinds snede komen hierbij aan de orde. Aan het eind van de meeste paragrafen zijn opgaven opgenomen, waarvan de helft pittig genoemd mag worden. Economische toepassingen vindt men hier veel minder dan gebruikelijk is in boeken op dit gebied.
Uit het voorgaande zal duidelijk zijn dat dit boek aanzienlijke eisen stelt aan de student en van hem geen geringe inspanning vraagt. Naar het oordeel van de schrijver geldt de uitspraak die Euclides van toepassing verklaarde op de koningen van toen, evenzeer voor de economen van nu: (.....) 'So wie im alten Griechenland schon klar war, dass es für Könige keinen besonderen Weg zur Geometrie gab ausser über die Elemente, so sollte heute klar sein, dass es für Okonomen keinen besonderen Weg zur *zuverlässigen* Verwendung der Mathematik unter Umgehung des mathematischen Denkens geben kann.'
Een beoordeling van dit boek hangt af van de mate waarin men zich kan verenigen met het standpunt van de schrijver. Deelt men zijn mening, dan heeft men met dit boek de beschikking over een helder geschreven inleiding in de analyse. Een uitstekende typografische verzorging en veel begeleidende figuren ondersteunen deze helderheid. Ten slotte vindt men in een literatuuropgave aanwijzingen voor verdere studie.

R. Bosch

P. A. Firby and C. F. Gardiner, '*Surface topology*', Ellis Horwood Limited, Chichester, 1982; 216 p.; £ 19,50.

In deze inleiding in de meetkundige topologie wordt enerzijds de meetkundige intuïtie als uitgangspunt en leidraad genomen, terwijl anderzijds wordt beoogd zowel de behandeling voldoende wiskundige strengheid te geven als in het stof-aanbod een redelijk niveau te bereiken.
De auteurs zijn in hun bedoeling tamelijk goed geslaagd. Zij hebben een aantrekkelijk boek geschreven, dat vrij origineel is opgezet. Het is de neerslag van een cursus die zij herhaaldelijk hebben gegeven voor wiskunde-studenten, die zich (nog) niet specialiseerden in de algebraïsche topologie.
Het boek handelt over de (topologische) structuur en de eigenschappen van (2-dimensionale, compacte, samenhangende) oppervlakken (zonder rand), – die in zekere euclidische ruimte $\mathbb{R}^n$ liggen. De basis-oppervlakken van dit type zijn: de bol S, de torus T, de Kleine fles K, en het projektieve vlak P. Merk op dat de beschouwde oppervlakken dus niet alle in $\mathbb{R}^3$ zijn in te bedden.
Het boek is als volgt ingericht. De eerste twee hoofdstukken voeren op intuïtieve wijze in het onderwerp in. Aan de orde komen daarbij: de algemene idee van een 2-dimensionaal oppervlak (in bovenaangegeven zin), samenhang, homeomorfe (= topologisch equivalente) oppervlakken, oriënteerbaarheid, de samenhangende-somconstructie (S_1, $S_2 \Rightarrow S_1 \# S_2$), vlakke modellen van oppervlakken, de basisoppervlakken (S, T, K, P).
De classificatiestelling wordt gefomuleerd: een oriënteerbaar oppervlak is homeomorf met nT voor zekere $n \geqslant 0$ (waarbij $0T$ als S wordt opgevat), en een niet-oriënteerbaar oppervlak is homeomorf met $nT \# K$ of met $nT \neq P$ voor zekere $n \geqslant 0$.
Tekeningen spelen (uiteraard) een belangrijke rol in deze uiteenzettingen. In hoofdstuk 3 wordt de representatie van oppervlakken door vlakke modellen verder ontwikkeld: Elk oppervlak kan worden voorgesteld door een $2n$-hoek (een polygoon met een even aantal hoekpunten) met gerichtbenoemde zijden.
Zo'n polygoon kan weer worden gerepresenteerd door een algebraische uitdrukking die ontstaat door in een welbepaalde volgorde (bijv. met de klok mee) de gericht-benoemde zijden ervan achter elkaar op te schrijven. Op die wijze kan elk oppervlak worden voorgesteld door een z.g. 'woord'. Bovendien kan men laten zien, dat een (niet-)oriënteerbaar oppervlak correspondeert met een (niet-)oriënteerbare 2n-hoek. Hier nemen de beschouwingen dan een wending: De auteurs definiëren een (niet-)oriënteerbaar oppervlak eenvoudigweg als een (niet-)oriënteerbare 2n-hoek. Hiermee hebben zij zich vastere grond onder de voeten verschaft. Het nieuwe uitgangspunt stelt hen in staat in de rest van het boek diverse beweringen ook echt te bewijzen; – om te beginnen hùn versie van de classificatiestelling.
Wat tot hier kort werd weergegeven betreft minder dan éénderde van het aantal bladzijden van het boek. De rest van de inhoud moge nu nog summier worden aangeduid: In hoofdstuk 4 wordt de Euler-karakteristiek ingevoerd. Aangetoond wordt dat twee oppervlakken homeomorf zijn dan en slechts dan als zij hetzelfde Euler-karakteristiek hebben en hetzij beide oriënteerbaar, hetzij beide niet-oriënteerbaar zijn.
Hoofdstuk 5 handelt over 'patronen' op oppervlakken; i.h.b. over (reguliere) complexen, triangulaties. In hoofdstuk 6 worden kaarten en graphen op oppervlakken beschouwd. Aan de orde komen met name de vraag naar N-kleurbaarheid van een kaart, en die naar de inbedbaarheid van een graph. De meer elementaire zaken worden bewezen. Hoofdstuk 7 handelt over vectorvelden op oppervlakken.
In hoofdstuk 8 wordt gesproken over de representatie van oppervlakken door (reguliere) 'tessellations' (= mozaïek-beleggingen, betegelingen) van het euclidische, hyperbolische of elliptische vlak. Daarbij worden het euclidische en het hyperbolische geval vrij uitvoerig besproken, het elliptische geval alleen genoemd. Iets preciezer: een oppervlak kan worden gerepresenteerd door een betegeling van het vlak, tezamen met een geassocieerde groep van isometrieën van die betegeling (die de fundamentaalgroep van het oppervlak is). De beschouwingen laten dan zien wèlke oppervlakken op deze wijze door betegelingen van het euclidische of hyperbolische vlak zijn te representeren. Vermeld wordt dan nog dat voor S en voor P het elliptische vlak nodig is.
In hoofdstuk 9 worden enige toepassingen van de betegelingsrepresentatie van oppervlakken besproken. In hoofdstuk 10 treft men enige opmerkingen aan over de fundamentaalgroep.
Het boek is in het algemeen gesproken helder geschreven. Veel figuren en voorbeelden ondersteunen het betoog. Er zijn goede opgaven (met achterin aanwijzingen voor de oplossing). Het belangrijkste is waarschijnlijk wel dat stijl en opzet van het boek sterk intuïtiestimulerend zijn.
Een paar minder belangrijke kritische kanttekeningen tot slot: De literatuurlijst is ietwat beperkt.

Hier en daar worden begrippen terloops geïntroduceerd, waar men een iets groter nadrukkelijkheid zou wensen. En een enkele maal zou men de volgorde van presentatie iets anders willen.

M. A. Maurice

Mededelingen

Te koop aangeboden

Euclides jrg 30 (1954/1955) t/m jrg 58 (1982/1983).
N. v. Kessel, tel. 080-55 34 12

Jaarvergadering/studiedag 1984

De jaarvergadering van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren wordt dit jaar gehouden op *zaterdag 27 oktober 1984* in het gebouw van de SOL, Archimedeslaan 16, Utrecht.
De Werkgroep Vrouwen en Wiskunde is in samenwerking met de NVvW bezig met de voorbereiding van het programma. Het programma zal in het teken staan van 'Vrouwen en Wiskunde'. Uit cijfers blijkt dat minder meisjes dan jongens wiskunde kiezen in hun studiepakket. Hoe komt dat? Welke faktoren hebben invloed op die keuze? Wat kun je als wiskunde-docent doen om die cijfers ten gunste van meisjes te veranderen?
De opzet van de dag is dezelfde als voorgaande jaren. 's Morgens en 's middags is er gelegenheid om mee te doen in een bepaalde werkgroep, waar een bepaald thema ter sprake zal komen.
Na de lunch is een lezing gepland.
Thema's voor de verschillende werkgroepen zijn:

- *Samenwerken en observeren.*
  Hoe werken leerlingen samen? Zijn er verschillen tussen jongens en meisjes te ontdekken?
- *Keuze wel of geen wiskunde.*
  Hoe komt de keus tot stand? Welke invloeden spelen daarbij een rol? Kan de houding van de wiskunde-docent een positieve invloed hebben?
- *Volwassenenonderwijs.*
  Wat is de motivatie van volwassenen om wiskunde te leren? Leren volwassenen anders dan kinderen?
- *Informatica.*
  Moet aan meisjes extra aandacht besteed worden om ze te betrekken bij het onderwijs in informatica? Is het goed om speciaal op hen gericht materiaal te ontwikkelen? Hoe moet dat er dan uitzien?
- *Leerstijlen.*
  Zijn er verschillen te konstateren in leerstijl tussen jongens en meisjes? Zo ja, welke?
- *Hewet.*
  Welke consequenties kan de invoering van wiskunde A en B hebben voor meisjes om wel of niet wiskunde te kiezen?
- *Leerboeken en lesmateriaal.*
  Hoe ziet lesmateriaal dat meisjes aanspreekt eruit?

Houdt 27 oktober vrij. De dag is bedoeld voor alle wiskunde-docenten van alle schooltypen in het voortgezet onderwijs.
De agenda voor de jaarvergadering, tevens uitnodiging voor de leden, komt in één van de volgende nummers van Euclides. Daarin wordt ook aangekondigd hoe men zich voor de studiedag kan aanmelden.

Kalender

(zie voor nadere informatie ook altijd de 'Mededelingen' hiervoor en in voorafgaande nummers)
Zomervakantie 1984: CWI-cursus.
woensdag 29 augustus 1984: bestuursvergadering NVvW, Utrecht
zaterdag 27 oktober 1984: jaarvergadering/studiedag NVvW, Utrecht

INHOUD

ADRESSEN VAN AUTEURS

L. A. M. van den Broek, Kamperfoeliestraat 14, 6666 WT Heteren

H. Broekman, PDI der RU Utrecht, postbus 80-120, 3508 TC Utrecht

J. van de Craats, Math. Inst. der RU Leiden, postbus 9512, 2300 RA Leiden

Mw. R. Dekker, Weteringschans 185^{III}, 1017 KE Amsterdam

E. Kamerich, St Annastraat 95, 6524 EJ Nijmegen

Mw F. Meester, Waalstraat 118^{III}, 1079 EC Amsterdam

H. N. Schuring, CITO, postbus 1034, 6801 MG Arnhem

P. Vredenduin, Dillenburg 148, 6865 HN Doorwerth